

Mathématiques pour la physique *et les physiciens !*

5^e édition

revue, corrigée et (encore) augmentée.

Walter APPEL

*ancien élève de
l'École normale supérieure de Lyon*

Agrégé de mathématiques

Docteur ès sciences physiques

Éditions H&K

68, boulevard de Port-Royal 75005 PARIS

Sommaire

Introduction	18	Algèbre et dualité	
Notations	20		
1 Convergence et limites	23	17 Bras et Kets	389
2 L'intégrale selon Lebesgue	67	18 Tenseurs	415
3 Calcul intégral	85	19 Formes différentielles	439
		20 Groupes et représentations	465
Analyse Complexe		Probabilités	
4 Fonctions holomorphes	99	21 Introduction aux probabilités	481
5 Singularités et résidus	119	22 Variables aléatoires	495
6 Compléments	143	23 Théorèmes limites	535
7 Transformations conformes	159		
Distributions		Annexes & Tables	
8 Distributions I	185	A Rappels d'analyse et d'algèbre	557
9 Distributions II	213	B Éléments de calcul différentiel	569
		C Quelques démonstrations	581
Analyse de Fourier		D Tables	587
10 Espaces de Hilbert	245	Références	593
11 Séries de Fourier	265	Table des portraits	598
12 T. de Fourier des fonctions	287	Index	599
13 T. de Fourier des distributions	305		
14 Transformation de Laplace	331		
15 Applications physiques de la TF	349		
16 Fonctions de Green	367		

Table des matières

Pourquoi ce livre ?	18
Index des notations	20
1 Convergences et limites	23
1.1 Le problème des limites en physique	23
1.1.a Un paradoxe énergétique	23
1.1.b Roméo, Juliette et les fluides visqueux	27
1.1.c Barrière de potentiel en mécanique quantique	28
1.1.d Filtre semi-infini se comportant comme un guide d'onde	30
1.2 Suites et séries	33
1.2.a Suites à valeurs dans un espace vectoriel normé	33
1.2.b Séries	34
1.2.c Séries absolument convergentes	35
1.2.d Espaces complets	36
1.2.e Suites de Cauchy	36
1.2.f Séries semi-convergentes	39
1.2.g Méthodes de point fixe et espaces complets	41
1.2.h Séries doublement infinies	43
1.2.i Convergence d'une série à double indice, théorème de Fubini	43
1.3 Suites et séries de fonctions	44
1.3.a Suites de fonctions	44
1.3.b Application aux suites doubles	48
1.3.c Séries de fonctions	49
1.4 Séries entières	50
1.4.a Formules de Taylor	50
1.4.b Une expérience numérique simple	51
1.4.c Rayon d'une série entière	53
1.4.d Fonctions analytiques	54
1.5 Séries asymptotiques et séries divergentes	55
1.5.a Séries asymptotiques	55
1.5.b Séries divergentes et développement asymptotique	57
<i>Exercices</i>	61
2 L'intégrale selon Lebesgue	67
2.1 L'intégrale selon B. Riemann	67
2.2 L'intégrale selon H. Lebesgue	70
2.2.a Principe de la construction (cas positif)	70
2.2.b Construction (canonique) de l'intégrale de Lebesgue	71
2.2.c Espaces L^1	74
2.2.d Espace L^2 , espaces L^p	75
2.3 Tribus et mesure de Lebesgue	76
2.3.a Tribus et boréliens	76
2.3.b Mesure de Lebesgue	78
<i>Encadré : Mesure de Lebesgue sur l'ensemble des boréliens</i>	79
2.3.c Tribu de Lebesgue	79
2.3.d Ensembles négligeables	80
2.3.e Mesure sur $\mathbf{R}^n$	81
2.3.f D'autres intégrales ?	81
<i>Exercices</i>	81
<i>Encadré : Un ensemble non mesurable</i>	83
3 Calcul intégral	85
3.1 L'intégrabilité en pratique	85
3.1.a Fonctions étalon	85
3.1.b Théorèmes de comparaison	86
3.1.c Intégrale et primitive : le théorème fondamental de l'analyse	86

3.2	Permuter une intégrale et une limite (ou une somme)	87
3.3	Intégrales paramétrées	89
3.3.a	Continuité d'une intégrale à paramètre	89
3.3.b	Dérivation sous le signe somme	90
3.3.c	Holomorphic d'une intégrale à paramètre	91
3.3.d	Cas où le paramètre est également dans les bornes	91
3.4	Intégrales doubles	92
3.5	Changement de variables	93
3.6	Produit de convolution	94
	<i>Exercices</i>	96
4	Analyse complexe — fonctions holomorphes	99
4.1	Fonctions holomorphes	99
4.1.a	Dérivation au sens complexe, conditions de Cauchy-Riemann	100
4.1.b	Exemples	102
4.1.c	Les opérateurs $\partial/\partial z$ et $\partial/\partial \bar{z}$	102
4.2	Intégrales de contour et théorème de Cauchy	103
4.2.a	Intégration sur des chemins	103
4.2.b	Indice d'un chemin	106
4.2.c	Divers théorèmes de Cauchy	106
4.3	Propriétés des fonctions holomorphes	109
4.3.a	Formules de Cauchy	109
4.3.b	Holomorphic et analyticité	110
4.3.c	Principe du maximum	113
4.3.d	Théorème de Green-Riemann	113
4.3.e	Classification des zéros d'une fonction holomorphe	114
4.3.f	Conséquences, rigidité des fonctions holomorphes	115
	<i>Exercices</i>	116
	<i>Encadré : Différentiabilité d'une fonction dans $\mathbf{R}^2$</i>	118
5	Singularités et résidus	119
5.1	Singularités d'une fonction	119
5.2	Fonctions méromorphes, séries de Laurent	121
5.2.a	Introduction	121
5.2.b	Fonctions méromorphes	121
5.2.c	Développement en série de Laurent d'une fonction méromorphe	122
5.2.d	Séries de Laurent	123
5.2.e	Exemples de séries de Laurent	124
5.2.f	Théorème des résidus	125
5.2.g	Calcul pratique des résidus	127
5.3	Applications aux calculs d'intégrales et de sommes	128
5.3.a	Lemmes de Jordan	128
5.3.b	Intégrales sur $\mathbf{R}$ d'une fraction rationnelle	129
5.3.c	Intégrales de type Fourier	130
5.3.d	Intégrales sur le cercle unité d'une fraction rationnelle	133
5.3.e	Calcul de sommes infinies	134
	<i>Exercices</i>	137
6	Compléments d'analyse complexe	143
6.1	Logarithme complexe; fonctions multivaluées	143
6.1.a	Les logarithmes complexes	143
6.1.b	La fonction racine carrée	144
6.1.c	Fonctions multivaluées; surfaces de Riemann	145
6.2	Fonctions harmoniques	147
6.2.a	Fonctions harmoniques réelles	147
6.2.b	Lien avec les fonctions holomorphes	148
6.2.c	Fonctions harmoniques complexes	149
6.3	Prolongements analytiques	150
6.4	Singularités à l'infini	151
6.5	Méthode du col	153
6.5.a	La méthode de Laplace	153
6.5.b	Méthode de la phase stationnaire	154
6.5.c	Méthode générale du col	155
	<i>Exercices</i>	157
7	Transformations conformes	159
7.1	Transformations conformes	159

7.1.a	Généralités	159
7.1.b	Théorème de Riemann	161
7.1.c	Exemples de transformations conformes	162
7.1.d	La transformation de Schwarz-Christoffel	165
7.2	Application à la théorie du potentiel	167
7.2.a	Transformation de l'équation $\Delta\varphi = \delta$	167
7.2.b	Application à l'électrostatique	169
7.2.c	Application à l'hydrodynamique	170
7.2.d	Théorie du potentiel, paratonnerres, percolation	173
7.3	Problème de Dirichlet et noyau de Poisson	175
	<i>Exercices</i>	179
8	Distributions I	185
8.1	Approche physique	185
8.1.a	Problème des distributions de charges	185
8.1.b	Problème des forces lors d'un choc élastique	187
8.2	Définitions et exemples de distributions	188
8.2.a	Distributions régulières	190
8.2.b	Distributions singulières	191
8.2.c	Support d'une distribution	192
8.2.d	Valeur principale de Cauchy	193
8.3	Opérations sur les distributions	193
8.3.a	Changements de variable affines	193
8.3.b	Dérivée d'une distribution	196
8.3.c	Un exemple : le noyau de la chaleur	197
8.4	Variations sur la distribution de Dirac	199
8.4.a	Distribution de Heaviside	199
8.4.b	Distributions de Dirac à plusieurs dimensions	199
8.4.c	La distribution δ' sur $\mathbf{R}$	201
8.4.d	La distribution δ' dans l'espace ; dipôles	202
8.4.e	Composition de δ avec une fonction	203
8.4.f	Densités de charge et de courant en relativité restreinte	204
8.5	Dérivation d'une fonction discontinue	205
8.5.a	Dérivation d'une fonction discontinue en un point	205
8.5.b	Dérivation d'une fonction discontinue sur une surface $\mathcal{S}$	207
8.5.c	Laplacien d'une fonction discontinue sur une surface $\mathcal{S}$	209
8.5.d	Application : laplacien de $1/r$ en trois dimensions	210
9	Distributions II	213
9.1	Valeur principale de Cauchy	213
9.1.a	Définition	213
9.1.b	Application au calcul de certaines intégrales	214
9.1.c	Notations de Feynman	215
9.1.d	Relations de Kramers-Kronig	216
9.1.e	Quelques équations au sens des distributions	218
9.2	La convolution	219
9.2.a	Produit tensoriel de deux fonctions	219
9.2.b	Produit tensoriel de deux distributions	220
9.2.c	Convolution de deux fonctions	221
9.2.d	Notion de mesure floue	223
9.2.e	Convolution de deux distributions	223
9.2.f	Applications	225
9.2.g	Équation de Poisson	226
9.2.h	Interprétation physique des opérateurs de convolution	226
9.2.i	Convolution discrète	229
9.3	Notions de topologie dans $\mathcal{D}'$	229
9.3.a	Convergence faible dans $\mathcal{D}'$	229
9.3.b	Suites de fonctions convergeant vers δ	230
9.3.c	Convergence dans $\mathcal{D}'$ et convergence au sens des fonctions	233
9.3.d	Régularisation d'une distribution	233
9.3.e	Continuité de la convolution	234
9.4	Algèbres de convolution	234
9.5	Résolution d'une équation différentielle avec conditions initiales	236
9.5.a	Cas d'une équation du premier ordre	236
9.5.b	Cas de l'oscillateur harmonique	237
9.5.c	Autres équations provenant de la physique	238
	<i>Exercices</i>	238

10	Espaces de Hilbert	245
10.1	Introduction : insuffisance des bases algébriques	245
10.2	Espaces préhilbertiens	246
10.2.a	Produits scalaires, normes et inégalités	246
10.2.b	Calculs en dimension finie	248
10.2.c	Projection sur un SEV de dimension finie	249
10.2.d	Inégalité de Bessel	250
10.3	Espaces de Hilbert	251
10.3.a	Bases hilbertiennes	251
10.3.b	L'espace ℓ^2	254
10.3.c	L'espace $L^2[0; a]$	255
10.3.d	L'espace $L^2(\mathbf{R})$	256
10.4	Polynômes orthogonaux	257
10.4.a	Espace L^2_w , polynômes orthogonaux	257
10.4.b	Zéros des polynômes orthogonaux	258
10.4.c	Formule de récurrence	259
10.4.d	Formule de Rodrigues	259
10.4.e	Polynômes orthogonaux et bases hilbertiennes	260
10.4.f	Polynômes de Legendre, quadratures et développements multipolaires	261
10.4.g	Harmoniques sphériques	263
	<i>Encadré : Procédé d'orthogonalisation et d'orthonormalisation</i>	264
11	Séries de Fourier	265
11.1	Introduction	265
11.1.a	Analyse et synthèse de Fourier	265
11.1.b	Fourier et l'équation de la chaleur	266
11.2	Série de Fourier d'une fonction L^2	267
11.2.a	Cadre géométrique (structure hilbertienne)	267
11.2.b	Coefficients de Fourier d'une fonction L^2	268
11.2.c	Extension et propriétés des coefficients de Fourier	270
11.3	Reconstruire la fonction : synthèse de Fourier	272
11.3.a	Convergence quadratique : Parseval	272
11.3.b	Le théorème de Riesz-Fisher : de L^2 à ℓ^2 et retour	274
11.3.c	Convergence ponctuelle : Dirichlet	274
11.3.d	Convergence uniforme : Fejér	276
11.4	Extensions	279
11.4.a	Fonctions T-périodiques	279
11.4.b	Rapide extension aux distributions	279
11.4.c	Les polynômes trigonométriques et le théorème de Cantor	280
	<i>Exercices</i>	280
12	Transformée de Fourier des fonctions	287
12.1	Transformée de Fourier d'une fonction de L^1	287
12.1.a	Définition	287
12.1.b	Exemples	288
12.1.c	Espace L^1	289
12.1.d	Propriétés élémentaires	289
12.1.e	Inversion	291
12.1.f	Extension de la formule d'inversion	293
12.2	Propriétés de la transformation de Fourier	294
12.2.a	Transposition, translation et dilatation	294
12.2.b	Dérivation	294
12.2.c	Fonctions à décroissance rapide	296
12.3	Transformée de Fourier d'une fonction de L^2	296
12.3.a	Espace $\mathcal{S}$	297
12.3.b	Transformée de Fourier dans L^2	298
12.4	Transformées de Fourier et convolution	299
12.4.a	Formule de convolution	299
12.4.b	Cas particuliers de la formule de convolution	300
12.5	Autres conventions pour définir la TF	301
12.6	Tableau synoptique	301
	<i>Exercices</i>	302
	<i>Encadré : Prolongement d'un opérateur linéaire continu</i>	304
13	Transformée de Fourier des distributions	305
13.1	Définition et propriétés	305
13.1.a	Distributions tempérées	306

13.1.b	Transformées de Fourier des distributions tempérées	307
13.1.c	Exemples	308
13.1.d	Transformation de Fourier à plusieurs dimensions	309
13.1.e	Formule d'inversion	311
13.2	Peigne de Dirac	311
13.2.a	Définition et propriétés	311
13.2.b	Transformée de Fourier d'une fonction périodique	313
13.2.c	Formule sommatoire de Poisson	313
13.2.d	Application aux calculs de séries	314
13.3	Phénomène de Gibbs	315
13.4	Application à l'optique physique	317
13.4.a	Lien entre diaphragme et figure de diffraction	317
13.4.b	Diaphragme composé d'une infinité de fentes infiniment fines	318
13.4.c	Nombre fini de fentes infiniment fines	319
13.4.d	Nombre fini de fentes de dimension finie	321
13.4.e	Pupille circulaire	322
13.5	Limitations de l'analyse de Fourier et ondelettes	324
	<i>Exercices</i>	326
14	Transformation de Laplace	331
14.1	Définition et sommabilité	331
14.1.a	Définition	331
14.1.b	Sommabilité	332
14.2	Inversion	336
14.3	Propriétés élémentaires et exemples de transformées de Laplace	337
14.3.a	Translation	337
14.3.b	Convolution	337
14.3.c	Dérivation et intégration	337
14.3.d	Théorèmes de la valeur initiale, de la valeur finale	339
14.3.e	Exemples	340
14.4	Transformation de Laplace des distributions	341
14.4.a	Définition	341
14.4.b	Propriétés	341
14.4.c	Exemples	342
14.4.d	Transformée en z	342
14.4.e	Lien entre transformées de Laplace et de Fourier	343
14.5	Applications physiques ; problème de Cauchy	344
14.5.a	Importance du problème de Cauchy	344
14.5.b	Un exemple simple	344
14.5.c	Évolution libre du champ électromagnétique	345
	<i>Exercices</i>	347
15	Applications physiques de la transformée de Fourier	349
15.1	Justification de l'analyse en régime sinusoïdal	349
15.2	Champs longitudinaux et champs transverses	351
15.3	Relations d'incertitude de Heisenberg	352
15.4	Signaux analytiques	356
15.5	Autocorrélation d'une fonction d'énergie finie	359
15.5.a	Définition et propriétés	359
15.5.b	Intercorrélation	360
15.6	Fonctions de puissance finie	360
15.6.a	Définitions	360
15.6.b	Autocorrélation	360
15.7	Application à l'optique : théorème de Wiener-Khintchine	361
15.8	Échantillonnage et théorème de Shannon	363
	<i>Exercices</i>	365
16	Fonctions de Green	367
16.1	Généralités sur les fonctions de Green	367
16.2	Un exemple pédagogique : l'oscillateur harmonique	368
16.2.a	Utilisation de la transformation de Laplace	369
16.2.b	Utilisation de la transformation de Fourier	370
16.3	Électromagnétisme et opérateur de d'Alembert	372
16.3.a	Calcul des fonctions de Green avancée et retardée	373
16.3.b	Potentiels retardés	376
16.3.c	Cas des dimensions inférieures	376
16.3.d	Écriture covariante des fonctions de Green avancée et retardée	379

16.3.e	Rayonnement	379
16.4	Équation de la chaleur	380
16.4.a	Cas unidimensionnel : fonction de Green du problème	380
16.4.b	Cas unidimensionnel : conditions initiales	382
16.4.c	Cas tridimensionnel	383
16.5	Mécanique quantique	384
16.6	Équation de Klein-Gordon	386
	<i>Exercices</i>	388
17	Bras, kets et toutes ces sortes de choses	389
17.1	Rappels de dimension finie	389
17.1.a	Produit scalaire et théorème de représentation	389
17.1.b	Adjoint	390
17.1.c	Endomorphismes symétriques ou hermitiens	391
17.2	Kets et Bras	392
17.2.a	Kets $ \psi\rangle \in \mathcal{H}$	392
17.2.b	Bras $\langle\psi \in \mathcal{H}'$	392
17.2.c	Bras généralisés	394
17.2.d	Kets généralisés	395
17.2.e	« $\text{Id} = \sum \varphi_n\rangle \langle\varphi_n $ »	396
17.2.f	Bases généralisées	396
17.3	Opérateurs linéaires	398
17.3.a	Opérateurs	398
17.3.b	Adjoint	400
17.3.c	Opérateurs bornés, fermés, fermables	401
17.3.d	Spectre discret et spectre continu	402
17.4	Opérateurs hermitiens ; opérateurs auto-adjoints	404
17.4.a	Définitions	404
17.4.b	Éléments propres	406
17.4.c	Vecteurs propres généralisés	407
17.4.d	Représentation « matricielle »	408
17.4.e	Résumé des propriétés des opérateurs P et X	411
	<i>Exercices</i>	413
18	Tenseurs	415
18.1	Tenseurs dans un espace affine	415
18.1.a	Vecteurs	415
18.1.b	Convention d'Einstein	417
18.1.c	Formes linéaires	417
18.1.d	Applications linéaires	420
18.1.e	Transformations de Lorentz	420
18.2	Produit tensoriel d'espaces ; tenseurs	421
18.2.a	Existence du produit tensoriel de deux espaces	421
18.2.b	Produit tensoriel de deux formes linéaires : tenseurs d'ordre $\binom{0}{2}$	422
18.2.c	Produit tensoriel de deux vecteurs : tenseurs d'ordre $\binom{2}{0}$	423
18.2.d	Applications linéaires : tenseurs d'ordre $\binom{1}{1}$	424
18.2.e	Tenseurs d'ordre $\binom{p}{q}$	426
18.3	La métrique : monter et descendre les indices	427
18.3.a	Métrique et pseudo-métrique	427
18.3.b	Dualité naturelle par la métrique	428
18.3.c	Gymnastique : élever et abaisser des indices	430
18.4	Opérations sur les tenseurs	432
18.5	Changements de coordonnées	433
18.5.a	Coordonnées curvilignes	433
18.5.b	Vecteurs de base	434
18.5.c	Transformation des vecteurs physiques	436
18.5.d	Transformation des formes linéaires	437
18.5.e	Transformation d'un champ de tenseurs quelconque	437
18.5.f	Brève conclusion	438
19	Formes différentielles	439
19.1	Formes différentielles de degré 1	439
19.1.a	Définition	439
19.1.b	Intégrale sur un chemin	440
19.1.c	Intégrale d'une différentielle	441

19.1.d	Formes exactes, formes fermées	442
19.1.e	Théorème de Poincaré	443
19.2	Algèbre extérieure	445
19.2.a	2-formes extérieures	445
19.2.b	k -formes extérieures	446
19.2.c	Produit extérieur	447
19.3	Formes différentielles	449
19.3.a	Définition	449
19.3.b	Dérivée extérieure	449
19.3.c	Intégrer une n -forme sur $\mathbf{R}^n$	450
19.3.d	Intégrer une 2-forme sur une 2-surface	450
19.3.e	Intégrer une k -forme sur une k -surface	451
	<i>Encadré : Intégration des formes différentielles</i>	452
19.3.f	Formules de Stokes	453
19.3.g	Théorème de Poincaré	454
19.4	Calcul vectoriel et électromagnétisme classique	455
19.4.a	Stokes et les formes différentielles dans $\mathbf{R}^3$	455
19.4.b	Poincaré et l'existence du potentiel scalaire électrostatique	456
19.4.c	Poincaré et l'existence du potentiel vecteur	457
19.4.d	Monopôles magnétiques	457
19.5	L'électromagnétisme dans le langage des formes différentielles	458
20	Groupes et représentations de groupes	465
20.1	Groupes, morphismes, représentations	465
20.1.a	Groupes	465
20.1.b	Morphismes	466
20.1.c	Représentations de groupes	467
20.2	Le groupe $SO(3)$ et les vecteurs	468
20.3	Le groupe $SU(2)$ et les spineurs	471
	<i>Encadré : Double connexité de $SO(3)$ et tour de magie</i>	476
20.4	Sphère de Riemann et spin	479
	<i>Exercices</i>	480
21	Introduction aux probabilités	481
21.1	Introduction	482
21.2	Définitions élémentaires	483
21.2.a	Le mystérieux univers Ω	484
21.2.b	Événements	484
21.2.c	Probabilités	487
21.2.d	Formule de Poincaré	488
21.3	Probabilités conditionnelles	489
21.4	Événements indépendants	491
	<i>Exercices</i>	493
22	Variables aléatoires	495
22.1	Qu'est-ce qu'une variable aléatoire ?	495
22.2	Lois, fonctions de répartition, densité	496
22.2.a	Loi de probabilité, fonction de répartition	496
22.2.b	Variables aléatoires discrètes	499
22.2.c	Lois discrètes classiques	499
22.2.d	Loi de Poisson	501
22.2.e	Variables aléatoires (absolument) continues	503
22.2.f	Lois classiques à densité	505
22.3	Espérance et variance	507
22.3.a	Espérance : cas discret	507
22.3.b	Espérance : cas continu et généralisation	509
22.3.c	Variance et écart-type	510
22.3.d	Moments d'ordres supérieurs	511
22.3.e	Moyenne et médiane	512
22.4	Vecteurs aléatoires	513
22.4.a	Couples discrets	513
22.4.b	Couples absolument continus	514
22.4.c	Covariance	516
22.4.d	Vecteurs aléatoires	519
22.5	Indépendance	519
22.5.a	Indépendance de deux variables aléatoires	519
	<i>Encadré : Propriétés des variables indépendantes</i>	521

22.5.b	Indépendance de n variables aléatoires	522
22.6	Image d'une variable aléatoire	523
22.6.a	Loi et densité	523
22.6.b	Fonction caractéristique	524
22.6.c	Fonction génératrice	525
22.6.d	Image d'un vecteur aléatoire	525
22.7	Somme et produit de variables aléatoires	526
22.7.a	Somme de variables aléatoires	526
22.7.b	Produit et quotient de variables à densité	527
<i>Exercices</i>		528
23	Théorèmes limites en probabilités	535
23.1	Introduction	535
23.2	Inégalité de Bienaymé-Tchebychev	537
23.3	Convergences en probabilité, presque sûre, en loi	540
23.4	La loi des grands nombres	541
23.5	Le théorème central limite	543
23.6	Approximations normales de lois discrètes	547
23.6.a	Approximation d'une loi binomiale par une loi normale	547
23.6.b	Approximation d'une loi de Poisson par une loi normale	549
23.6.c	Approximation normale et inégalité de Bienaymé-Tchebychev	550
<i>Exercices</i>		551

Annexes

A	Rappels d'analyse et d'algèbre	557
A.1	Espaces vectoriels normés	557
A.1.a	Normes et semi-normes	557
A.1.b	Boules et topologie	558
A.1.c	Densité	559
A.1.d	Topologie relative	560
A.1.e	Relations de comparaison	560
A.1.f	Compacité	560
A.1.g	Comparaison de normes	561
A.1.h	Complétude	561
A.1.i	Norme linéaire	562
A.1.j	Connexité, convexité...	563
A.2	Représentations matricielles	564
A.2.a	Dualité (calculs dans une base)	564
A.2.b	Dualité dans un espace vectoriel euclidien	565
A.2.c	Matrice d'une famille de vecteurs	565
A.2.d	Matrice d'une application linéaire	565
A.2.e	Matrice d'une forme linéaire, théorème de représentation	566
A.2.f	Changements de bases	566
A.3	Théorème spectral	568
<i>Exercice</i>		568
B	Éléments de calcul différentiel	569
B.1	Différentielle d'une fonction	569
B.1.a	Rappels sur la dérivée	569
B.1.b	Différentielle d'une fonction	570
B.1.c	Différentielle d'une composée	571
B.1.d	$\mathcal{C}^k$ -difféomorphismes	571
B.2	Fonctions à valeurs réelles	573
B.2.a	Différentielle et gradient	573
B.2.b	Fonctions de classe $\mathcal{C}^2$	573
B.2.c	Surfaces et hypersurfaces	573
B.2.d	Théorème des fonctions implicites	574
B.2.e	Une étrange relation : $\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1$	575
B.3	Extrema liés et multiplicateurs de Lagrange	576
B.3.a	Le cas libre	576
B.3.b	Le point de vue algébrique (formes linéaires)	576
B.3.c	Le point de vue géométrique (gradients)	577
B.3.d	Mise en œuvre du théorème des extrema liés	578
B.3.e	Un exemple détaillé : température et facteur de Boltzmann	578
<i>Exercice</i>		579

C Quelques démonstrations	581
D Tables	587
Tables des transformées de Fourier et de Laplace	587
Tables des lois usuelles	591
Tables de la loi normale	592
Références	593
Liste alphabétique des portraits	598
Index	599

Pourquoi ce livre ?

QUINZE ANS ONT PASSÉ depuis la première édition de ce livre, et de nombreux bons ouvrages de mathématiques pour la physique ont vu le jour — signe que les physiciens ne considèrent plus les mathématiques comme un savoir négligeable, signe également que les mathématiciens se tournent vers leurs collègues physiciens et que le dialogue, une fois repris, est enrichissant pour les deux disciplines.

Si ceux qui voient les mathématiques seulement comme un outil — ce qu'elles sont aussi — sont légion, il est utile de rappeler que, comme le disait Galilée, le livre de la Nature est écrit dans le langage des mathématiques¹. Depuis Galilée et Newton, les plus grands physiciens ont montré que la connaissance mathématique permet de comprendre et d'utiliser plus facilement des notions physiques précises, de les fonder solidement et, surtout, d'en créer de nouvelles². Outre qu'elles assurent la rigueur indispensable à la pratique scientifique, les mathématiques font également partie du langage naturel des physiciens. Même si, dans la pratique quotidienne, la règle de trois et les bases des calculs intégral et différentiel suffisent, une langue plus riche permet une profondeur de pensée incomparable. Einstein a passé un temps considérable à apprendre la géométrie riemannienne pour concevoir la théorie de la relativité générale, Heisenberg s'est formé en algèbre linéaire pour mettre au point sa mécanique des matrices.

En fait, les deux champs de pensée sont parfois tellement peu discernables que la médaille Fields, plus haute récompense dans le domaine des mathématiques, a été décernée en 1990 au physicien Edward WITTEN, qui a utilisé des idées physiques pour (re)démontrer un théorème mathématique.

Comment lire ce livre ? — Ou plutôt, comment *ne pas en lire* certains passages. Parce que le lecteur aura envie de se ménager, ou parce que ses goûts le porteront plus naturellement vers certains des domaines exposés, voici un bref aperçu du contenu de l'ouvrage :

- Le premier chapitre traite de convergences, et montre les difficultés qu'on peut éprouver à intervertir des limites *dans le cadre de modèles physiques*. La nécessité, à un moment donné du raisonnement physique, d'intervertir deux limites mathématiques, n'est pas toujours visible. De nombreux paradoxes apparents en découlent.

1. « *La philosophie est inscrite dans ce très vaste livre qui est éternellement ouvert devant nos yeux — je veux dire l'Univers — mais on ne peut pas le lire avant d'avoir appris la langue et d'être familiarisé avec les caractères dans lesquels elle est écrite. Elle est écrite en langue mathématique et ses lettres sont des triangles, des cercles et autres figures géométriques, moyens auxquels il est humainement impossible de comprendre un seul mot [...].* »

2. Je me bornerai à évoquer NEWTON (gravitation, calcul différentiel et intégral), GAUSS (optique, magnétisme et toutes les mathématiques de l'époque), HAMILTON (mécanique, équations différentielles, algèbre), HEAVISIDE (calcul symbolique, traitement du signal), GIBBS (thermodynamique, analyse vectorielle) et bien sûr EINSTEIN... la liste est beaucoup plus longue. Richard FEYNMAN, qui dans son excellent cours [51] présente une vision très « physique » de l'art demandant remarquablement peu de formalisme, maîtrisait assurément des mathématiques élaborées comme en témoigne son travail de recherche.

- Vient ensuite la théorie de l'intégration. On y expose brièvement (chapitre 2) les fondements de la théorie de la mesure et de l'intégrale de Lebesgue ; ce chapitre peut être omis en première lecture ; le chapitre 3 résume les techniques usuelles du calcul intégral.
- Les chapitres 4 à 7 exposent les bases de la théorie des fonctions d'une variable complexe :
 - le chapitre 4 traite des fonctions holomorphes (c'est-à-dire dérivables au sens complexe) et montre qu'elles sont analytiques. Certaines notions physiques, comme par exemple la *causalité*, sont étroitement liées à l'analyticité de fonctions sur $\mathbf{C}$ (section 15.4) ;
 - la « méthode des résidus » (chapitre 5) est un formidable outil de calcul intégral ;
 - les fonctions harmoniques (vérifiant $\Delta f = 0$) en deux dimensions sont utilement reliées à la partie réelle d'une fonction holomorphe (chapitre 6) ;
 - les transformations *conformes* (qui préservent les angles) permettent de simplifier élégamment des problèmes de conditions aux bords en hydrodynamique ou en électromagnétisme (chapitre 7).
- Les chapitres 8 et 9 sont consacrés à la théorie des distributions et à leur utilisation en physique. Ils forment un ensemble relativement indépendant.
- Les chapitres 10 à 14 traitent des espaces de Hilbert, des séries de Fourier et des transformations de Fourier et de Laplace, dont les applications physiques sont innombrables. Le chapitre 15 traite d'applications à la physique. L'analyse complexe est nécessaire à leur lecture.
- Plusieurs problèmes physiques précis sont posés et résolus pas à pas dans le chapitre 16 grâce à la méthode des fonctions de Green. Cette résolution manque en général dans les ouvrages d'électromagnétisme (où une solution est exhibée, sortant tout droit du chapeau) ou de théorie des champs (où la méthode est censée être connue). J'espère combler une lacune en présentant ces calculs (relativement simples) menés de bout en bout, avec les notations des physiciens.
- Le chapitre 17 est une (trop) courte introduction aux notations de Dirac utilisées en mécanique quantique : *kets* $|\psi\rangle$ et *bras* $\langle\psi|$. On y expose les notions de bases propres généralisées et d'opérateurs auto-adjoints.
- Les chapitres 18 et 19 sont assez largement indépendants du reste de l'ouvrage. Ils concernent le calcul tensoriel et l'utilisation des formes différentielles et ne sont, à chaque fois, qu'une courte introduction au sujet.
- Le chapitre 20 a pour modeste et unique but de relier des notions de topologie et de théorie des groupes à l'idée de *spin* en mécanique quantique.
- La théorie des probabilités (chapitres 21 à 23) est, pour ainsi dire, complètement ignorée dans le cursus de l'étudiant en physique. Pourtant, la connaissance du vocabulaire et des résultats essentiels des probabilités me paraît nécessaire au physicien, qu'il soit théoricien (équations stochastiques, mouvement brownien, mécanique quantique et mécanique statistique s'analysent avec la théorie des probabilités) ou expérimentateur (bruits blancs gaussiens, erreurs de mesure, écarts-type dans une série de données...).
- Enfin, des rappels élémentaires sont donnés en annexe, ainsi que quelques démonstrations intéressantes dont la longueur interdisait qu'on les laissât dans le texte.

De nombreuses applications physiques, utilisant les outils mathématiques mais avec les notations des physiciens, sont présentes dans le texte. On pourra se reporter, dans l'index, à l'entrée « Applications physiques ».

Chapitre 1

Convergences et limites

Ce premier chapitre, élémentaire, consiste essentiellement en un rapide panorama de la notion de convergence des suites et séries. Le lecteur qui a encore toutes ces notions bien présentes à l'esprit peut directement passer au chapitre suivant.

Cependant, bien que les objets mathématiques exposés ici soient en principe connus, certaines de leurs propriétés sont parfois surprenantes. Nous verrons notamment que, dans le cas d'une série convergente, un simple changement de l'ordre de la sommation peut en changer la somme.

Nous proposons, pour se mettre en appétit, un problème physique dans lequel un processus de passage à la limite (trop rapide) se trouve plus ou moins *caché*. Il conduit à un paradoxe apparent, qui est levé lorsque le processus de limite est explicitement écrit.

1.1 LE PROBLÈME DES LIMITES EN PHYSIQUE

1.1.a Un paradoxe énergétique

Un camion de masse m suit une trajectoire rectiligne, à la vitesse $v = 60 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Pressé par le temps, le camionneur appuie sur le champignon jusqu'à atteindre la vitesse $v' = v + \Delta v = 80 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Au cours de cette accélération, des forces (supposées non dissipatives) s'exercent entre le camion et la Terre, dont le détail est inutile car nous allons raisonner uniquement en termes de *bilan énergétique*, dans le système {camion + Terre}, supposé isolé.

Le changement de vitesse du camion a un coût énergétique, égal à la différence d'énergie cinétique

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m [(v + \Delta v)^2 - v^2] \quad (1.1)$$

puisque la Terre, infiniment plus massive que le camion, ne change pas de vitesse. En simplifiant outrageusement le modèle, cette quantité d'énergie se retrouve directement au niveau de la consommation de gazole du camion¹.

1. Illustrons l'expérience, en notant ℓ la quantité de carburant nécessaire pour augmenter l'énergie cinétique du camion ; en tenant compte du pouvoir calorifique du gazole, d'un rendement thermodynamique du moteur de 0,20 et d'une masse de $m = 10$ tonnes, on peut estimer le produit $\ell m = 10^{-4} \text{ L} \cdot \text{km}^{-2} \cdot \text{h}^2$. Ainsi, pour passer de 60 à 80 kilomètres par heure, la quantité de gazole consommée est

$$\ell \Delta E_c = \frac{1}{2} \ell m (v'^2 - v^2) = \frac{1}{2} \ell m (3,6)^2 (6\,400 - 3\,600) = 0,14 \text{ L}.$$

Chapitre 2

L'intégrale selon Lebesgue

Ce chapitre traite de la théorie des intégrales : on y présente les principes de construction de l'intégrale de Riemann, les limitations de cette construction, puis la théorie de l'intégrale dite « de Lebesgue ». On y évoque brièvement les bases de la théorie de la mesure, utilisée autant dans la théorie de l'intégration que dans celle des probabilités.

L'ensemble des théorèmes et des techniques liés au calcul intégral proprement dit (changement de variable, inversion d'intégrales et de limites ou de sommes) fait l'objet du chapitre suivant : le physicien pressé d'utiliser un outil puissant sans lire tous les détails de la notice peut donc directement passer au chapitre 3.

2.1 L'INTÉGRALE SELON B. RIEMANN

Une méthode pour définir ce qu'est l'intégrale d'une fonction f sur un segment $[a; b]$ est la suivante : on commence par découper le segment en n parties, plus ou moins de la même taille d'environ $(b - a)/n$, en choisissant des réels

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b ;$$

puis on « approche » f par une fonction dont la valeur est constante sur chaque petit intervalle, égale à celle de f au début de l'intervalle (figure 2.1 page suivante).

La somme des aires des petits rectangles est alors

$$S_n = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \cdot f(x_{k-1}),$$

et l'on peut espérer que cette valeur va converger lorsque l'on fait tendre n vers l'infini. Bien évidemment, pour que la convergence ait lieu, il suffit que les approximations de f s'améliorent avec l'augmentation de n , c'est-à-dire que les valeurs de f sur un intervalle du style $[x; x + \varepsilon]$ soient d'autant plus proches de $f(x)$ que ε est petit. On reconnaît ici la notion de *continuité*¹ de f . C'est exactement ce que dit le théorème de Riemann, que nous préciserons.

1. En réalité, la démonstration du théorème de Riemann repose sur une propriété plus forte, qui est l'uniforme continuité de f ; celle-ci découle de la continuité de f sur le compact $[a; b]$.

Chapitre 3

Calcul intégral

3.1 L'INTÉGRABILITÉ EN PRATIQUE

Le physicien a souvent affaire à de « vraies » fonctions, dont l'étude nécessite des arguments pratiques et pas seulement théoriques. Aussi, il est important de connaître les techniques habituelles permettant de montrer l'intégrabilité de fonctions. La méthode se déroule en deux temps :

- d'abord, trouver des critères pratiques, permettant de décider sur quelles parties de $\mathbf{R}$ les fonctions usuelles (dites « étalon ») sont intégrables ;
- ensuite, établir des théorèmes de comparaison permettant de ramener l'étude d'une fonction compliquée à celle de fonctions étalon.

3.1.a Fonctions étalon

On s'intéresse ici à des fonctions définies sur un intervalle semi-ouvert $[a; b[$, où b peut être un réel ou $+\infty$ (le cas où l'intervalle est $]a; b]$ est complètement symétrique, et l'on s'y ramène par changement de variable). C'est un cas très général : l'intégrabilité sur $\mathbf{R}$ se ramène alors à l'intégrabilité à la fois sur $[0; +\infty[$ et sur $] -\infty; 0]$.

PROPOSITION 3.1 (Intégrabilité d'une fonction positive) *Une fonction positive $f : [a; b[\rightarrow \mathbf{R}^+$ et admettant une primitive F , est intégrable si et seulement si F admet une limite finie en b . (De même pour une fonction définie sur $]b; c]$.)*

Exemple 3.2 La fonction $\ln$ est intégrable sur $]0; 1]$. Les fonctions $x \mapsto e^{-ax}$ sont intégrables sur $[0; +\infty[$ si et seulement si $a > 0$.

Remarque 3.3 L'intégrabilité est une propriété globale, et non locale. Si f est intégrable sur une famille $(A_k)_{k \in \mathbf{N}}$ d'intervalles, elle n'est pas forcément intégrable sur $\bigcup_k A_k$.

PROPOSITION 3.4 (Fonctions de Riemann (t^α)) *La fonction $f_\alpha : t \mapsto t^\alpha$ est intégrable sur $[1; +\infty[$ si et seulement si $\alpha < -1$. Elle est intégrable sur $]0; 1]$ si et seulement si $\alpha > -1$.*

PROPOSITION 3.5 (Fonctions de Bertrand ($t^\alpha(\ln t)^\beta$)) *La fonction $t \mapsto t^\alpha(\ln t)^\beta$ est intégrable sur $[1; +\infty[$ si et seulement si $\alpha < -1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta < -1$).*

Chapitre 4

Analyse complexe : fonctions holomorphes

Nous consacrons maintenant quatre chapitres à la théorie des fonctions complexes d'une variable complexe.

Dans ce chapitre, on introduit la notion de *fonction holomorphe*, c'est-à-dire de fonction définie et *dérivable* sur un ouvert du plan¹ complexe $\mathbf{C}$; la propriété la plus remarquable est que l'hypothèse (faible) de dérivabilité entraîne, en violent contraste avec le cas réel, la conséquence (nettement plus forte) d'infinie dérivabilité et même d'analyticité.

Nous étudierons ensuite (chapitre 5) des fonctions présentant des *singularités* en des points isolés et holomorphes par ailleurs; nous verrons que leur étude aura d'importantes applications pour le calcul de nombreuses intégrales et sommes, notamment dans le calcul des transformées de Fourier qui apparaissent en physique.

Les fonctions multivaluées (racine carrée, logarithme complexe...), les fonctions harmoniques et la méthode du col seront présentées au chapitre 6.

Enfin, le chapitre 7 exposera comment des techniques d'*analyse conforme* permettent de résoudre élégamment certains problèmes de physique à deux dimensions, notamment en électrostatique et en mécanique des fluides incompressibles, aussi bien qu'en théorie de la diffusion et en physique des particules (voir également le chapitre 16).

4.1 FONCTIONS HOLOMORPHES

Alors que la dérivabilité dans $\mathbf{R}$ est un concept relativement peu contraignant², la dérivabilité dans le plan complexe (la « $\mathbf{C}$ -dérivabilité ») entraîne au contraire de très nombreuses propriétés de régularité et rend les fonctions « rigides », dans un sens qui sera précisé bientôt.

1. L'étude du plan complexe doit beaucoup aux travaux de Rafaele BOMBELLI (1526–1573) qui utilisait l'imaginaire i pour résoudre des équations algébriques (il l'appelait « *di meno* », c'est-à-dire « *racine* » de moins *[un]* »), et du mathématicien suisse Jean-Robert ARGAND (1768–1822) qui popularisa l'interprétation géométrique plane de $\mathbf{C}$. On appelle parfois « plan d'Argand » le plan complexe. C'est également ARGAND qui introduit le terme de *module* d'un nombre complexe. La notation « i », remplaçant l'ancienne écriture $\sqrt{-1}$, est due à Euler (cf. page 57).

2. Une fonction f , définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbf{R}$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ peut être dérivable en tout point de I sans que, par exemple, la dérivée soit continue. Ainsi, en posant $f(0) = 0$ et $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ pour tout x non nul, la fonction f est dérivable en tout point de $\mathbf{R}$, $f'(0) = 0$ mais f' n'est pas continue en 0 (elle n'y admet pas de limite). Il est possible de construire des fonctions pathologiques, dérivables en tout point, mais dont la dérivée n'est continue nulle part.

Chapitre 5

Singularités et résidus

Certaines fonctions ne sont holomorphes que sur un ouvert privé d'un ou plusieurs points, comme la fonction $z \mapsto 1/z$, qui l'est sur $\mathbf{C} \setminus \{0\}$. Ces fonctions revêtent une grande importance, les points en lesquels elles présentent une *singularité* ayant généralement une signification physique¹.

Nous présentons ici une étude des singularités d'une fonction, ainsi que la généralisation du développement en série entière (valable sur un disque) d'une fonction sous la forme d'une somme doublement infinie

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n = \cdots + \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

valable quant à lui sur une couronne. Nous expliquons ensuite le théorème des résidus et ses applications à de nombreux calculs.

5.1 SINGULARITÉS D'UNE FONCTION

Considérons une fonction complexe f , définie et holomorphe sur $\Omega \setminus \{a\}$, ouvert privé d'un point. Les raisons qui font que f n'est pas holomorphe sur Ω sont *a priori* de plusieurs types :

- f pourrait être continue² en a sans y être dérivable ;
- f pourrait présenter une discontinuité en a , tout en restant bornée au voisinage de a ;
- f pourrait ne pas être bornée en a .

En réalité, les deux premiers cas ne se produisent jamais — la continuité en a entraîne l'holomorphie et le fait d'être bornée implique la continuité en a .

1. En théorie de la réponse linéaire, la fonction de réponse va être, selon les conventions, disons analytique dans le demi-plan complexe supérieur, mais va présenter des pôles dans le demi-plan inférieur [6]. Ces pôles correspondent à des énergies de différents modes. En physique des particules, ils seront caractéristiques de la *masse* d'une excitation (particule) ainsi que de sa *durée de vie*.

2. Plus précisément : pourrait admettre un prolongement par continuité en a .

Chapitre 6

Compléments d'analyse complexe

6.1 LOGARITHME COMPLEXE ; FONCTIONS MULTIVALUÉES

6.1.a Les logarithmes complexes

On cherche à étendre la fonction logarithme réelle $x \mapsto \ln x$, définie sur $\mathbf{R}^{+*}$, à la partie la plus large possible du plan complexe.

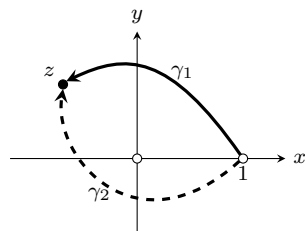
L'idée la plus naturelle est de revenir à l'une des définitions possibles du logarithme réel : c'est la primitive de $x \mapsto 1/x$ qui s'annule en $x = 1$. Muni de l'intégration complexe, on pose donc

$$\forall z \in \mathbf{C}^* \quad L(z) \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_{\gamma(z)} \frac{dw}{w}, \quad (6.1)$$

où $\gamma(z)$ est un chemin du plan complexe reliant 1 à z et ne passant pas par 0 (pour que l'intégrale soit bien définie). L'équation (6.1) définit-elle bien une fonction ? La réponse est « oui » si tout choix du chemin γ conduit à une même valeur de $L(z)$, et « non » dans le cas contraire.

Ci-contre, on représente deux chemins γ_1 et γ_2 reliant 1 à z , mais passant d'un côté et de l'autre de l'origine. Si l'on note γ le chemin composé de γ_1 et de $-\gamma_2$, l'intégrale de $1/w$ sur γ est égale à $2i\pi$ fois le résidu en 0 (qui vaut 1) : $\int_{\gamma} dw/w = 2i\pi$, donc

$$\int_{\gamma_1} \frac{dw}{w} = \int_{\gamma_2} \frac{dw}{w} + 2i\pi.$$



En conséquence, il n'est pas possible de définir de logarithme complexe sur le plan privé de l'origine $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus \{0\}$.

Pour éviter ce genre de désagréments, privons le plan d'une demi-droite, par exemple $\mathbf{R}^-$:

Chapitre 7

Transformations conformes

Les transformations conformes sont des changements de variable $w = f(z)$ dans le plan complexe, donnés par une fonction f holomorphe ; un domaine Ω du plan est alors transformé en un domaine $\Omega' = f(\Omega)$. Ces transformations vérifient deux propriétés intéressantes : conservation des angles (utile en cartographie) et préservation des fonctions harmoniques (c'est-à-dire de laplacien nul). La résolution d'un problème de type $\Delta\varphi = 0$, muni de conditions sur le bord $\partial\Omega$, est alors changé en un problème similaire, avec des conditions sur le nouveau bord $\partial\Omega'$, qui peut être nettement plus simple.

Nous étudierons quelques exemples de transformations conformes connues, avant d'aborder des applications à deux domaines de la physique où sont recherchées des fonctions harmoniques : électrostatique et hydrodynamique.

7.1 TRANSFORMATIONS CONFORMES

7.1.a Généralités

Considérons un changement de variables $f : (x, y) \mapsto (u, v) = (u(x, y), v(x, y))$ dans le plan $\mathbf{R}^2$ identifié à $\mathbf{C}$. Ce changement ne mérite réellement son nom que si f est localement bijective (on dit aussi **localement bi-univoque**) ; c'est le cas si f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que son jacobien ne s'annule pas (celui de la transformation inverse, parfois plus facile à calculer, est également non nul) :

$$\left| \frac{D(u, v)}{D(x, y)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{et} \quad \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0.$$

THÉORÈME 7.1 *Lors d'un changement de variable complexe*

$$z = x + iy \longmapsto w = f(z) = u + iv,$$

si f est holomorphe, alors le jacobien de la transformation vaut

$$J_f(z) = \left| \frac{D(u, v)}{D(x, y)} \right| = |f'(z)|^2.$$

Chapitre 8

Distributions I

Les chapitres 8 et 9 sont consacrés aux distributions qui font partie du paysage familier au mathématicien et sont l'objet de recherches pointues. Pourtant, les distributions ont été introduites afin de résoudre des problèmes d'origine physique : distributions de charges, équations différentielles menant à des solutions discontinues (ondes de choc), mécanique quantique, etc.

Dans ce chapitre, on définit les distributions et leur dérivation, ce qui nous amènera à revoir la notion de dérivation d'une fonction discontinue.

8.1 APPROCHE PHYSIQUE

8.1.a Problème des distributions de charges

En électrostatique classique, une particule ponctuelle de charge électrique q située en un point $\mathbf{r}_0$ de l'espace ordinaire $\mathbf{R}^3$ produit, en tout point $\mathbf{r}$ de $\mathbf{R}^3 \setminus \{\mathbf{r}_0\}$, un champ électrostatique :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3}.$$

Lorsque plusieurs charges ($q_i, \mathbf{r}_i$) sont présentes, la linéarité des équations de Maxwell nous assure la superposition des champs créés par chacune des charges :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\|^3}. \quad (*)$$

Cependant, lorsqu'on travaille dans le domaine macroscopique, il est parfois préférable de décrire la distribution des charges sous forme *continue* ; on la modélise alors par une fonction $\rho : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ qui, à chaque point, associe la densité de charge électrique en ce point. L'interprétation de la fonction ρ est la suivante : si $\mathbf{r}_0 \in \mathbf{R}^3$ et si $d^3\mathbf{r} = dx dy dz$ est un volume élémentaire situé autour de $\mathbf{r}_0$, alors

$$\rho(\mathbf{r}_0) dx dy dz$$

représente la charge totale contenue dans $dx dy dz$.

Chapitre 9

Distributions II

Dans ce chapitre, nous introduisons une distribution de grande utilité en physique : la distribution « valeur principale de Cauchy », afin notamment d'établir la célèbre formule, que l'on rencontre aussi bien en optique, en mécanique statistique, en mécanique quantique qu'en théorie des champs :

$$\frac{1}{x \pm i\varepsilon} = \text{vp} \frac{1}{x} \mp i\pi\delta.$$

Puis nous étendons la notion de convolution aux distributions. Nous nous intéressons ensuite à la topologie des espaces de distributions et nous introduisons la notion d'algèbre de convolution, qui nous mènera à celle de fonction de Green. Enfin, nous montrons comment traiter dans un même élan la résolution d'une équation différentielle et l'inclusion des conditions initiales dans la solution.

9.1 VALEUR PRINCIPALE DE CAUCHY

9.1.a Définition

On rappelle que la fonction $x \mapsto 1/x$ ne définit pas une distribution régulière, car elle n'est pas intégrable au voisinage de $x = 0$. En revanche, on peut définir, pour $\varphi \in \mathcal{D}$, la quantité

$$\text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx,$$

ce qui nous permet de définir la distribution $\text{vp}(1/x)$, par

$$\left\langle \text{vp} \frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = \text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right].$$

On généralise ainsi cette définition :

DÉFINITION 9.1 Soit $x_0 \in \mathbf{R}$. On définit la distribution **valeur principale de Cauchy** $\text{vp} \frac{1}{x-x_0}$ par son action sur toute fonction-test $\varphi \in \mathcal{D}$:

$$\left\langle \text{vp} \frac{1}{x-x_0}, \varphi \right\rangle = \text{vp} \int \frac{\varphi(x)}{x-x_0} dx \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x-x_0| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x-x_0} dx.$$

Chapitre 10

Espaces de Hilbert

10.1 INTRODUCTION : INSUFFISANCE DES BASES ALGÈBRIQUES

Afin de montrer l'insuffisance des espaces vectoriels munis des bases habituelles (qu'on appelle **bases algébriques**), voici un petit problème : on note $E = \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs réelles. E est manifestement un espace vectoriel, de dimension infinie. Or, la théorie générale de l'algèbre linéaire nous enseigne que¹ :

THÉORÈME 10.1 *Tout espace vectoriel possède des bases algébriques.*

La question est alors :

Pouvez-vous donner une base de E ?

(Avant de lire la suite, faites un essai !)

Vous avez peut-être pensé que la famille

$$\left\{ (1, 0, 0, \dots), (0, 1, 0, \dots), (0, 0, 1, 0, \dots), \dots \right\} \quad (*)$$

est une base algébrique... Mais ce n'est pas vrai, car elle n'est pas *génératrice* ; pour le montrer, rappelons d'abord quelques définitions.

DÉFINITION 10.2 (Base algébrique) Soit I un ensemble d'indices (pouvant être fini, dénombrable ou non dénombrable). Le **sous-espace vectoriel engendré** par la famille de vecteurs $(x_i)_{i \in I}$ d'un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel E , que l'on note $\text{Vect} \{x_i ; i \in I\}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires (*finies*, par définition)

$$\text{Vect} \{x_i ; i \in I\} \stackrel{\text{déf.}}{=} \left\{ x = \sum_{i \in I'} a_i x_i ; I' \subset I \text{ fini et } a_i \in \mathbf{K} \right\}.$$

Si $\text{Vect} \{x_i ; i \in I\} = E$, on dit que la famille $(x_i)_{i \in I}$ est **génératrice**. Elle est dite **libre** si les seules combinaisons linéaires (finies) nulles sont celles dont tous les coefficients sont nuls. Enfin, elle est appelée **base algébrique** si elle est à la fois libre et génératrice.

1. Mais le théorème qui l'affirme ne donne pas de moyen de construire une telle base. Pire, il utilise une version équivalente à l'axiome du choix, appelée **lemme de Zorn** et dont l'énoncé, fort gracieux (« Soit Z un ensemble ordonné non vide tel que toute partie totalement ordonnée possède au moins un majorant dans Z . Alors il existe dans Z au moins un élément maximal. ») met cependant la puce à l'oreille du physicien : on ne pourra pas en tirer grand-chose de constructif !

Chapitre 11

Séries de Fourier

11.1 INTRODUCTION

11.1.a Analyse et synthèse de Fourier

On doit à Joseph FOURIER l'idée de décomposer toute fonction 2π -périodique en une somme de fonctions sinusoïdales $t \mapsto e^{int}$, pour des valeurs entières de n . Si une telle fonction f se décompose sous la forme

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikt}, \quad (*)$$

il est aisé de « deviner » comment s'obtiennent les coefficients. En effet, un calcul élémentaire donne, pour tous entiers n et k :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} e^{ikt} dt = \delta_{n,k}. \quad (**)$$

Avec en tête la linéarité de l'intégrale, on peut *raisonnablement* espérer obtenir

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt. \quad (***)$$

Bien sûr, la linéarité ne suffit pas : une intégration terme à terme (c'est-à-dire un échange $\sum / \int$) a été effectuée et il faut la justifier.

L'objet de la théorie de Fourier est double :

- étudier le lien¹ entre une fonction 2π -périodique et ses coefficients de Fourier c_n : c'est la partie **analyse de Fourier** ;
- étudier s'il est possible de reconstruire la fonction f à partir de la connaissance de ses coefficients c_n : c'est la partie **synthèse de Fourier**.

1. Par exemple, nous verrons que plus la fonction f est régulière, plus la suite des coefficients converge rapidement vers 0.

Chapitre 12

Transformée de Fourier des fonctions

Nous introduisons dans ce chapitre la transformation intégrale appelée « transformée de Fourier », qui généralise au cas des fonctions $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ quelconques l'analyse de Fourier des fonctions périodiques.

On commence par définir la transformée de Fourier pour les fonctions intégrables au sens de Lebesgue (éléments de L^1). Un des inconvénients de la transformée de Fourier ainsi définie est qu'elle ne laisse pas l'espace L^1 stable. On étendra donc cette définition aux fonctions de carré sommable (éléments de L^2), qui possèdent une interprétation énergétique en physique. L'espace L^2 étant stable, toute fonction de carré sommable possédera une transformée de Fourier de carré sommable.

La transformation de Fourier a indéniablement été la révolution mathématique la plus importante depuis la création du calcul différentiel et intégral, tant elle s'est révélée indispensable dans de nombreux domaines des mathématiques, de la physique et de l'ingénierie.

12.1 TRANSFORMÉE DE FOURIER D'UNE FONCTION DE L^1

Dans ce paragraphe, on commence par définir et établir les principales propriétés de la transformée de Fourier d'une fonction intégrable.

12.1.a Définition

DÉFINITION 12.1 Soit f une fonction, réelle ou complexe, d'une variable *réelle*. On appelle **transformée de Fourier** (ou **spectre**) de $f(t)$, *si elle existe*, la fonction $\hat{f}$ de la variable réelle ν définie par :

$$\hat{f}(\nu) \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi\nu t} dt.$$

On écrit alors symboliquement :

$$\hat{f} = \mathcal{F}[f] \quad \text{ou} \quad \hat{f}(\nu) = \mathcal{F}[f(t)].$$

Chapitre 13

Transformée de Fourier des distributions

13.1 DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS

On cherche maintenant à définir la notion de transformée de Fourier au sens des distributions. L'intérêt est double :

1. Définir la transformée de Fourier des distributions, comme δ ou III.
2. Espérer étendre la transformation de Fourier à une plus grande classe de fonctions ; notamment, les fonctions qui ne sont ni dans $L^1(\mathbf{R})$, ni dans $L^2(\mathbf{R})$ mais qui interviennent constamment en physique, comme la fonction de Heaviside.

Afin de définir la transformée de Fourier d'une distribution, on commence, comme on en a maintenant l'habitude, par se restreindre au cas, particulier, d'une distribution régulière. On considère donc une fonction localement sommable. Et là... on se souvient que, par malheur, « être localement sommable » n'est pas, pour une fonction, une condition suffisante pour posséder une transformée de Fourier.

Restreignons-nous davantage et considérons une fonction $f \in L^1$. Elle est intégrable et, par voie de conséquence, localement intégrable ; aussi définit-elle une distribution régulière (également notée f). Sa transformée de Fourier $\hat{f}$ est continue, donc localement intégrable : elle définit, elle aussi, une distribution $\hat{f}$, dont l'action sur une fonction-test φ est

$$\langle \hat{f}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t) \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2i\pi xt} dx \right) \varphi(t) dt$$

soit, en utilisant le théorème de Fubini pour intervertir les deux intégrales (ce qui est permis puisque f est supposée intégrable et que φ l'est nécessairement) :

$$\langle \hat{f}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi xt} \varphi(t) dt \right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \hat{\varphi}(x) dx = \langle f, \hat{\varphi} \rangle.$$

Ce calcul justifie la définition suivante :

Chapitre 14

Transformation de Laplace

La transformation de Laplace unilatérale est une transformation intégrale, qui est une sorte de généralisation de la transformation de Fourier pour les fonctions définies sur $[0; +\infty[$. Son intérêt est double :

1. Elle évite l'emploi des distributions dans le cas où une fonction n'admet pas de transformée de Fourier au sens des fonctions ;
2. Elle peut résoudre des problèmes décrits par des équations différentielles en prenant en compte les conditions initiales, c'est-à-dire qu'elle permet de s'attaquer à un problème de Cauchy ; un exemple physique est donné, celui de l'évolution libre du champ électromagnétique.

14.1 DÉFINITION ET SOMMABILITÉ

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons à une transformation intégrale effectuée sur les fonctions f qui sont *nulles* pour les valeurs négatives de la variable : $f(t) = 0$ pour tout $t < 0$, aucune condition de continuité en 0 n'étant exigée. Par exemple, la fonction $t \mapsto H(t) \cos t$.

Il est cependant fréquent que, dans la littérature concernant les transformées de Laplace, le facteur $H(t)$ soit omis ; nous nous conformerons à cet usage, sauf en cas d'ambiguïté, et nous parlerons donc de la fonction $t \mapsto \cos t$, en sous-entendant que cette définition est restreinte aux valeurs *positives* de t .

DÉFINITION 14.1 On appelle **fonction causale** toute fonction $t \mapsto f(t)$ nulle pour les valeurs négatives de son argument :

$$f(t) = 0 \quad \text{pour tout } t < 0.$$

14.1.a Définition

DÉFINITION 14.2 Si $f(t)$ est une fonction réelle ou complexe, localement sommable, de la variable réelle t , on appelle **transformée de Laplace (unilatérale) de $f(t)$** la fonction complexe notée $\mathcal{L}f(p)$, ou $F(p)$, de variable complexe p , définie par :

$$\mathcal{L}f(p) \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt.$$

Chapitre 15

Applications physiques de la transformée de Fourier

15.1 JUSTIFICATION DE L'ANALYSE EN RÉGIME SINUSOÏDAL

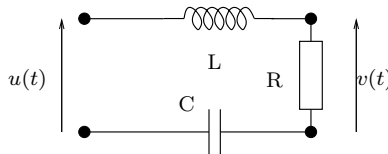
Lors de l'étude d'un *système linéaire*¹, une méthode courante est la suivante :

- 1) On considère les situations où le signal est purement *monochromatique*.
- 2) La réponse à un signal quelconque est la somme des réponses aux différentes fréquences qui composent ce signal.

On justifie ensuite l'analyse sinusoïdale en disant

« Si l'on impose en entrée un signal sinusoïdal de pulsation ω donnée, alors le signal de sortie est sinusoïdal de même pulsation ω . »

Pour fixer les idées, considérons l'exemple très scolaire d'un circuit RLC. Supposons que le signal d'entrée soit la tension $t \mapsto u(t)$ aux bornes du circuit total et le signal de sortie la tension $t \mapsto v(t)$ aux bornes de la résistance (c'est-à-dire, à un facteur R près, l'intensité parcourant le circuit).



En établissant l'équation différentielle liant u et v , on obtient l'égalité (valable au sens des distributions) :

$$u = \left[\frac{L}{R} \delta' + \frac{1}{RC} \mathbf{H} + \delta \right] * v = D * v,$$

1. Par exemple, un système mécanique formé de ressorts et de masselottes, ou bien un circuit électrique comportant des composants linéaires comme des résistances, des condensateurs ou des bobines, ou encore le champ électromagnétique libre, régi par les équations de Maxwell...

Chapitre 16

Fonctions de Green

Ce chapitre n'est pas réellement un cours sur les fonctions de Green et l'on n'y introduit pas vraiment d'objets ou de concepts nouveaux par rapport à ce qui précède. On montre plutôt, au travers de quelques exemples physiques simples, comment les différentes techniques déjà étudiées (transformations de Fourier et de Laplace, transformation conforme, convolution, dérivation au sens des distributions) permettent de résoudre simplement certains problèmes physiques liés à des équations différentielles linéaires.

Le premier problème est lié à la propagation des ondes électromagnétiques dans le vide. On y établit *ab initio* la fonction de Green du d'alembertien ainsi que la *formule des potentiels retardés* créés par une distribution quelconque de sources.

Le second problème est la résolution de l'équation de la chaleur, soit en utilisant des transformées de Fourier, soit en utilisant celles de Laplace.

Enfin, on verra comment les fonctions de Green apparaissent naturellement en mécanique quantique.

16.1 GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS DE GREEN

Considérons un système *linéaire* de signal d'entrée E et de signal de sortie S . Celui-ci est décrit par une équation du type¹

$$\Phi(S) = E.$$

Ce que nous appelons ici « signal d'entrée » et « signal de sortie » peuvent être de nature très diverse, comme :

- des signaux électriques dans un circuit (par exemple l'alimentation en entrée et la réponse d'un composant en sortie) ;
- des charges et courants (entrée) et des champs électromagnétiques (sortie) ;
- des sources de chaleur (entrée) et une température (sortie) ;
- des forces (entrée) et une position ou une vitesse (sortie).

L'opérateur Φ est *linéaire* et *continu*. Il peut dépendre de variables comme le temps ou la position. Dans ce chapitre, nous nous intéresserons au cas où il est *invariant par translation* (temporelle ou spatiale)². La plupart du temps, Φ est un opérateur différentiel (comme un laplacien, un d'alembertien, etc.).

1. Et non pas $S = \Phi(E)$, ce qui serait beaucoup plus simple. En théorie de la diffusion de la chaleur, par exemple, le « signal de sortie » est la température $T(\mathbf{x}, t)$, tandis que celui d'« entrée » est la source de chaleur $\rho(\mathbf{x}, t)$. Ils sont reliés par une équation de la forme $c \frac{\partial T}{\partial t} - \mu \Delta T = \rho$.

2. Un exemple non invariant par translation a été traité ponctuellement au paragraphe 7.2.b page 169.

Chapitre 17

Bras, kets et toutes ces sortes de choses

17.1 RAPPELS DE DIMENSION FINIE

Dans cette section, on considère un espace vectoriel E , sur le corps $\mathbf{K}$ des réels ou des complexes, de dimension finie n , muni d'un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ et d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$. On rappelle quelques propriétés élémentaires concernant le produit scalaire, les bases orthonormées et l'adjoint d'un endomorphisme ; ces résultats seront à rapprocher de ceux qui seront donnés pour la dimension infinie, et qui sont sensiblement différents.

17.1.a Produit scalaire et théorème de représentation

À chaque vecteur $a \in E$, on peut canoniquement associer une forme linéaire φ_a définie par

$$\begin{aligned}\varphi_a : E &\longrightarrow \mathbf{K} \\ x &\longmapsto (a|x) .\end{aligned}$$

Lorsque E est de dimension finie, l'application $a \mapsto \varphi_a$ est même un isomorphisme d'espaces vectoriels entre E et son dual E^* :

THÉORÈME 17.1 (Théorème de représentation) *L'espace E est isomorphe à son espace dual E^* . En particulier, pour toute forme linéaire φ sur E , il existe un unique $a \in E$ tel que $\varphi = \varphi_a$, c'est-à-dire*

$$\forall x \in E \quad \varphi(x) = (a|x) .$$

DÉMONSTRATION « ABSTRAITE » : Les espaces E et E^* étant de même dimension finie, et l'application $\Phi : a \mapsto \varphi_a$ étant linéaire, il suffit de prouver qu'elle est injective pour conclure que c'est un isomorphisme. Soit $a \in \text{Ker } \Phi$, c'est-à-dire un vecteur tel que $(a|x) = 0$ pour tout vecteur $x \in E$. En particulier, $(a|a) = 0$ donc $a = 0$, ce qui achève la démonstration. ■

Remarque 17.2 (Démonstration effective : représentation matricielle de a et de φ_a)

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . Notons M la matrice représentative de

Chapitre 18

Tenseurs

*Je suis le tensoriel, le vieux, l'inconsommé
Le printemps d'Arabie à la tourbe abonnie
Ma simple étole est molle et mon lynx consterné
Pose le solen noué de la mélanémie.*

El Desdonado, *variations sur S + 7* par Raymond Queneau
d'après El Desdichado de Gérard de Nerval [89].

Dans ce chapitre, peu de détails seront donnés sur la *manipulation pratique* des tenseurs, sur les recettes de calcul usuelles, gymnastique d'indices, contractions, reconnaissance du caractère tensoriel, etc. De nombreux et excellents ouvrages [9, 37, 51, 76, 80, 118] établissent ces règles. (Et font souvent beaucoup plus !)

Ici, on se concentrera sur la *construction mathématique* des tenseurs, afin de compléter la vision « calculatoire » du physicien. Ce chapitre est donc déconseillé aux physiciens qui voudraient faire leurs tous premiers pas avec les tenseurs. Il est plutôt écrit pour ceux qui ont commencé à manipuler des tenseurs et voudraient comprendre ce qui se cache derrière.

Ce chapitre étant purement introductif, nous ne considérerons que des tenseurs dans des espaces plats. Il ne sera donc pas question de transport parallèle, de fibrés, de connexions ou de symboles de Christoffel. Le lecteur désireux d'en savoir davantage est renvoyé aux classiques de géométrie différentielle, comme Cartan [27].

18.1 TENSEURS DANS UN ESPACE AFFINE

Si $\mathbf{K}$ est le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, on identifiera $E = \mathbf{K}^n$, espace vectoriel de dimension n (généralement 4), à un espace affine $\mathcal{E}$ de même dimension. On munira E d'une base $\mathcal{B} \stackrel{\text{déf.}}{=} (\mathbf{e}_\mu)_\mu = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$. (On adopte ici la convention typographique de Misner *et al.* [86], qui différencient les quadrivecteurs $\mathbf{e}$ des vecteurs tridimensionnels $\mathbf{e}$.)

18.1.a Vecteurs

Soit $\mathbf{u}$ un vecteur de $\mathcal{E}$, c'est-à-dire un élément de $\mathbf{K}^n$. Il existe alors une décomposition unique de $\mathbf{u}$ comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$:

Chapitre 19

Formes différentielles

Dans tout ce chapitre, E est un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension finie n , que l'on identifie avec $\mathbf{R}^n$ au moyen d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$. Les coordonnées dans cette base sont notées génériquement $x_1, x_2, \dots, x_n$.

19.1 FORMES DIFFÉRENTIELLES DE DEGRÉ 1

19.1.a Définition

Soit $F : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction réelle sur $E = \mathbf{R}^n$, que l'on suppose différentiable en tout point¹. La différentielle de F en un point $\mathbf{a}$ est la forme linéaire, notée $dF_{\mathbf{a}}$ ou $dF(\mathbf{a})$, valant

$$dF(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_k}(\mathbf{a}) dx_k$$

qui à un vecteur $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ associe le nombre²

$$dF(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_k}(\mathbf{a}) h_k.$$

La différentielle de F est l'application

$$\begin{aligned} dF : \mathbf{R}^n &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}), \\ \mathbf{a} &\longmapsto dF(\mathbf{a}). \end{aligned}$$

Supposons F de classe $\mathcal{C}^{k+1}$; alors les fonctions $f_i = \partial F / \partial x_i$ sont de classe $\mathcal{C}^k$, et la fonction dF est un exemple fondamental de ce qu'on appelle une *forme différentielle* de degré 1 et de classe $\mathcal{C}^k$.

Plus généralement, une **forme différentielle de degré 1**, ou **1-forme différentielle**, de classe $\mathcal{C}^k$ est une application

$$\begin{aligned} \omega : U \subset \mathbf{R}^n &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}), \\ \mathbf{x} &\longmapsto \omega(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

1. Des rappels de calcul différentiel élémentaire sont disponibles dans l'annexe B page 569, et d'autres sur les formes linéaires dans l'annexe A page 557.

2. On utilise ici la convention $\varphi \cdot \mathbf{h}$ pour indiquer le résultat de l'application d'une forme φ sur un vecteur $\mathbf{h}$, que l'on écrit plus communément $\varphi(\mathbf{h})$: en effet, $[dF(\mathbf{a})](\mathbf{h})$ est bien moins lisible que $dF(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h}$.

Chapitre 20

Groupes et représentations de groupes

20.1 GROUPES, MORPHISMES, REPRÉSENTATIONS

20.1.a Groupes

DÉFINITION 20.1 Un **groupe multiplicatif** $(G, \cdot)$ est un ensemble G muni d'une loi interne « $\cdot$ » et tel que

- « $\cdot$ » est associative sur G : $(g \cdot h) \cdot k = g \cdot (h \cdot k)$;
- $(G, \cdot)$ admet un **élément neutre** e , c'est-à-dire un élément de G tel que pour tout $g \in G$, on a $e \cdot g = g \cdot e = g$;
- tout élément de G est **symétrisable**, c'est-à-dire que pour tout $g \in G$, il existe un élément $h \in G$ tel que $g \cdot h = h \cdot g = e$. Ce symétrisé est unique : on le note g^{-1} et on l'appelle **inverse** de g .

Un groupe $(G, \cdot)$ est dit **abélien** ou commutatif si sa loi est commutative, c'est-à-dire si $g \cdot h = h \cdot g$ pour tous $g, h \in G$.

Remarque 20.2 (Groupes additifs) Dans de nombreux groupes abéliens, la loi interne est assimilable à une addition : on convient alors de la noter « $+$ », le symétrique d'un élément g étant noté $-g$ et le neutre « 0 ».

C'est le cas notamment des groupes $(\mathbf{Z}, +)$ et $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +)$.

Exemple 20.3 (Groupe linéaire) L'ensemble $GL_n(\mathbf{R})$ des matrices carrées inversibles d'ordre n , muni du produit de matrices, est un groupe ; il est non abélien dès que $n \geq 2$.

Exemple 20.4 (Groupe de symétries) L'ensemble des opérations de symétrie qui laissent invariante la configuration d'équilibre d'une molécule, muni de la loi de composition des applications, est un groupe.

Exemple 20.5 (Rotations vectorielles du plan) L'ensemble des rotations de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^2$ (rotations laissant l'origine invariante) est un groupe commutatif.

Exemple 20.6 Considérons l'espace orienté $E = \mathbf{R}^3$ muni de sa structure euclidienne ; notons G l'ensemble des rotations (transformations actives) de E de centre 0 . Alors, $(G, \circ)$ est un groupe

Chapitre 21

Introduction aux probabilités

La statistique est la science qui permet de prouver que 99,99 % des hommes ont un nombre de jambes supérieur à la moyenne.

La théorie des probabilités a pour objet de *modéliser* mathématiquement la notion, difficile à appréhender par ailleurs, de hasard ; une confrontation avec l'expérience permet ensuite d'apprécier la pertinence de cette modélisation.

Celle-ci recouvre, en général, une connaissance incomplète d'un système. Cette incomplétude peut être fondamentale (par exemple, dans le cas de la désintégration d'une particule), ou effective (dans le cas du lancer d'un dé ou d'une pièce¹, ou de l'étude du mouvement brownien d'une poussière dans un fluide, il « suffirait » de connaître position et vitesse initiales de chacune des particules du système pour que le hasard disparaisse).

La théorie des probabilités s'intéresse à ce qu'il est possible de dire d'un événement lorsqu'une « expérience » est réalisée un grand nombre de fois.

Elle ne s'occupe pas seulement d'événements « aléatoires » (dans les deux sens précédents) ; elle permet aussi de *décrire* de façon simple des distributions compliquées, comme dans la théorie du signal ou dans l'imagerie, en dégageant des notions de statistique.

Enfin, elle permet de *tenir des discours* sur tel ou tel événement et, le cas échéant, de faire prendre des vessies pour des lanternes. Bien que cette pratique soit de celles que l'on ne saurait conseiller, il est utile de connaître un minimum ces techniques, aussi bien pour la vie scientifique (certains résultats sont présentés comme probants², alors qu'une analyse statistique les donne au contraire comme très certainement inintéressants), que pour la vie de tous les jours d'un citoyen responsable.

Ce chapitre a pour but d'introduire les notions élémentaires de la théorie des probabilités, ainsi que le vocabulaire particulier qui est utilisé : *événement, probabilité conditionnelle, indépendance*.

Le chapitre 22 présentera les variables aléatoires et les concepts associés : *loi, espérance, écart-type, corrélation*.

Enfin, le chapitre 23 présentera la notion de convergence des variables aléatoires, avec deux théorèmes fondamentaux : la *loi des grands nombres* et le *théorème central limite*. Des applications à l'approximation des variables aléatoires en seront déduites.

1. Dans le cas du tirage à *pile* ou *face*, le mathématicien et ancien prestidigitateur Persi DIACONIS a montré qu'il existait un biais dans le résultat du tirage (voir [41]), biais qu'un prestidigitateur peut bien sûr exploiter.

2. C'est le tristement célèbre cas de la « mémoire de l'eau », voir [24] pour une analyse détaillée.

Chapitre 22

Variables aléatoires

Hasard ?
Mets que font les fripons pour les sots qui le mangent.
Point de hasard !

Victor HUGO
Ruy Blas, acte IV, scène VII.

22.1 QU'EST-CE QU'UNE VARIABLE ALÉATOIRE ?

L'univers Ω peut être un ensemble vaste, et difficilement descriptible (par exemple, si chaque élément ω est la description complète des positions et vitesses de 10^{23} particules et si Ω est l'ensemble de tous les ω possibles). Or, très souvent, nous ne nous intéressons qu'à une donnée numérique issue de ω , par exemple, la pression ou l'entropie associée à cette description d'un gaz¹. Notons X cette donnée ; puisqu'elle dépend de la réalisation particulière ω du hasard, X est en réalité une application de Ω dans $\mathbf{R}$. On définit donc une **variable aléatoire réelle** comme une application $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ — et l'histoire pourrait s'arrêter là.

Il faut hélas travailler un peu plus pour obtenir un fondement théorique sain. En effet, nous aurons à nous poser des questions du genre : « quelle est la probabilité que la variable X prenne ses valeurs dans l'intervalle I ? » ou, ce qui revient au même, « quelle est la probabilité de l'ensemble des ω tels que $X(\omega) \in I$? ». Ce dernier ensemble n'est autre² que $X^{-1}(I)$. Si l'on veut pouvoir donner une probabilité associée à chaque intervalle I , il convient donc que chaque image réciproque $X^{-1}(I)$ fasse partie de l'ensemble $\mathfrak{T}$ sur lequel la probabilité $\mathbf{P}$ est définie. Afin de pouvoir utiliser des propriétés de σ -additivité, il faudra imposer cette condition, non seulement aux intervalles, mais également à toutes les parties de $\mathbf{R}$ engendrées par ces intervalles : l'ensemble $\mathfrak{B}(\mathbf{R})$ des boréliens de $\mathbf{R}$.

1. C'est un point capital : contrairement à ce qui se passe en Analyse, où la structure de l'ensemble de départ est cruciale (pour définir la notion de continuité, ou celle de dérivabilité par exemple), avec les variables aléatoires, *seul le résultat compte !*

2. Rappelons que, si f est une application d'un ensemble E vers un ensemble F , et si B est une partie de F , alors on définit $f^{-1}(B) = \{x \in E ; f(x) \in B\}$. Il n'existe *a priori* pas d'application f^{-1} (puisque f n'est pas supposée bijective) ; mais la notation $f^{-1}(B)$ est correctement définie pour toute partie B de E .

Chapitre 23

Théorèmes limites en probabilités

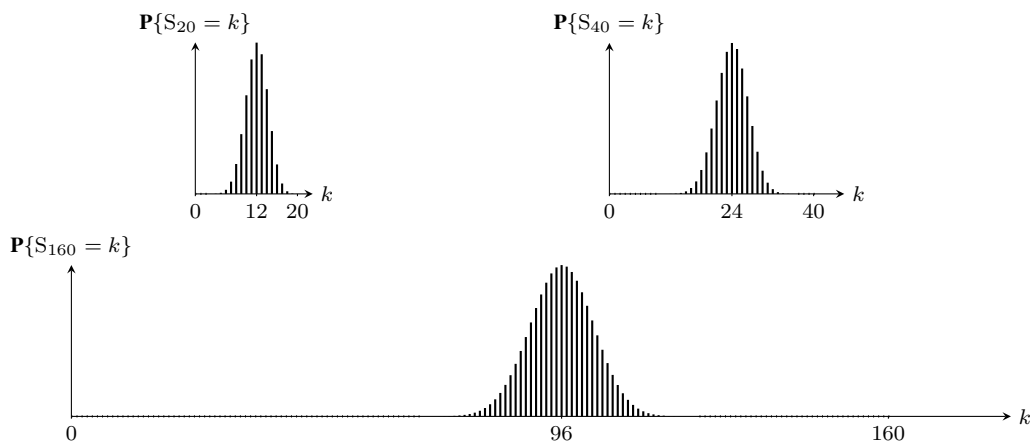
GUILDENSTERN (*Flips a coin.*) : The law of averages, if I have got this right, means that if six monkeys were thrown up in the air for long enough they would land on their tails about as often as they would land on their —

ROSENCRANTZ : Heads. (*He picks up the coin.*)

Tom STOPPARD, *Rosencrantz & Guildenstern are dead* [111]

23.1 INTRODUCTION

Une simple expérience de pensée comme une succession infinie de tirages à *pile* ou *face* nous met en présence de résultats de type *théorèmes limites*. Ci-dessous, nous représentons l'histogramme de la loi du nombre de *pile* obtenu lors de n tirages : $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, où X_k est la variable valant 1 si le k -ième tirage amène *pile* et 0 sinon (la probabilité d'obtenir *pile* étant ici $p = 0,6$) ; les valeurs successives de n sont 20, 40 et 160.



Index

Les numéros de page en **gras** renvoient aux définitions principales, ceux en *italique* à des exercices. Les noms en PETITES CAPITALES renvoient aux indications biographiques.

Symboles	
* (adjoint)	390
† (adjoint)	400, 472
* (opérateur de Hodge)	459
$\xrightarrow{L}$	540
$\xrightarrow{P}$	540
$\xrightarrow{P, S}$	540
$\xrightarrow{CV, S}$	45
$\xrightarrow{CV, U}$	45
Γ (fonction d'Euler)	579
$\sqsubset$	332
$\sqcap$	191
$\square$	372
$\sqcup$	486
ω	484
$\langle \psi $	254, 392
$ \psi\rangle$	254, 392
$\langle x $	394
$ x\rangle$	395
$\langle p $	395
$ p\rangle$	395
$\sim (u_n \sim v_n)$	560
$\otimes$	220, 421
$\wedge$ (produit extérieur)	445, 447, 448

A	
Abélien (groupe —)	465
Abel (transformation d'—)	62
Absolue continuité	503
Accumulation (point d'—)	114
Adhérence, Adhérent (point —)	558
Adjoint	390, 400, 568
AIRY George (<i>Sir</i>)	60
Airy (intégrale d'—)	60
ALEMBERT Jean le Rond d'	373
d'alembertien	372
Algèbre	
σ -algèbre	76
de convolution	234
extérieure	445, 448
de Lie	471
Aliasing	364
Alternées (critère des séries —)	62
Analytique	
fonction —	54, 110
prolongement —	150
signal —	357, 358
Anti-holomorphe (fonction —)	103, 160
Apparente (singularité —)	120
Application contractante	41
Applications physiques	
électricité	61, 349
électromagnétisme	204 , 217, 345, 351, 365, 372–380, 457, 458, 461
électrostatique	157, 169, 226, 326, 456
hydrodynamique	27, 171, 179, 180
mécanique	23–26
mécanique quantique	28, 56, 254, 352, 413, 384–414, 471, 479

optique	57, 61, 216, 240, 317–323, 326, 356, 361, 365
oscillateur harmonique	237, 368–372
résonance	351
radioactivité	501, 512
relativité	204, 221, 239
thermodynamique	96, 178, 179, 380–384, 578
Approximation	
binomiale $\rightarrow$ Poisson	503
binomiale $\rightarrow$ normale	547
Poisson $\rightarrow$ normale	549
Argument	103
Arnaque	556
Arrêt (point d'—)	171
Artificielle (singularité —)	120
Atomique (masse —)	487
Auto-adjoint	
endomorphisme —	391, 568
opérateur —	404
Autocorrélation	359–363
Axiome du choix	83

B	
$\mathfrak{B}(\mathbf{R})$	77
Banach (théorème du point fixe de —)	41
Banach-Tarski (paradoxe de —)	80
Base	
algébrique	245
duale	418
généralisée	397
hilbertienne	252
BAYES Thomas	492
Bayes (formule de —)	490, 491
BERNOULLI Jacques	541
Bernoulli (loi, épreuve de —)	499
Bessel	
fonction de —	323, 326
inégalité de —	250
BIENAYMÉ Jules	537
Bienaymé (égalité de —)	527
Bienaymé-Tchebychev (inég. de —)	537
Binomiale (loi —)	499, 591
approximation	
par une loi normale	547
par une loi de Poisson	503
BOLZANO Bernhard	66
Bolzano (théorème de — -Weierstrass)	561
Boréliens	77
BOREL Émile	78
Borel (lemme de — -Cantelli)	493
Borné (opérateur —)	401
BORTKIEWICZ Władysław	502
Boule ouverte/fermée	558
Bra	254, 392
généralisé	394
Branche	146
Branchement	
point de —	122, 144
processus de —	529
Bromwich (contour de —)	336
Brownien (mouvement —)	174, 382
BUFFON	538

- C**
- $\bar{C}$ 151
- Cantelli (lemme de Borel —) 493
- Cantor (théorème d'unicité de —) 280
- Caractéristique (fonction —) 524
- Casorati (th. de — -Weierstrass) 120
- CAUCHY Augustin-Louis 101
- Cauchy
- conditions de — -Riemann 100, 103
 - critère de — 37, 38
 - formule de — 62, 109, 110
 - inégalité de — -Schwarz 247, 516
 - loi de — 511, 551, 591
 - problème de — 236, 344
 - produit de — 225
 - suite de — 37
 - théorème de — 103, 106, 107, 582
 - théorème de — -Lipschitz 63
 - valeur principale de — 193, 194, 213
- Causal(e)
- fonction — 331, 358
 - système — 227
- Causalité 521
- Cavendish (expérience de —) 461
- CD (échantillonnage) 364
- Centrée (variable aléatoire —) 511
- Central limite (théorème —) 382, 545
- Chaleur
- équation de la — 197, 238, 380
 - noyau de la — 197, 238, 380, 381
- Champ
- électromagnétique
 - évolution libre du — 345
 - fonction de Green du — 372 - transverse/longitudinal 351
- Chance 482
- Changement de coordonnées 433
- Charge (densité de —) 204
- Chemin
- s équivalents 441
 - indice d'un — 106, 581
 - intégrale sur un — 104, 440
- Choix (axiome du —) 83
- CHRISTOFFEL Elwin 167
- Cigogne (effet —) 521
- Cinétique relativiste 204
- Classe $\mathcal{S}$ 407
- Classique (limite —) 28
- Clothoïde 137
- Coalitions (lemme des —) 523
- Coefficient
- de corrélation 516
 - s de Fourier 269
 - d'une distribution 279
 - s de structure 471
- Cohérence
- fonction de — 360
 - spatiale 61
 - temporelle 361
- Col 155
- méthode du — 153
- Commutatif (groupe —) 465
- Commutativement convergente 39
- Compact 560
- Compact Disc (échantillonnage) 364
- Complémentaire 485
- Complet
- espace — 36, 561
 - espace mesuré — 80
 - système — d'événements 486
- Compléter un EVN 70
- Composées (formule des probabilités —) 489
- Conditionnelle
- densité — 515
 - loi — 514
 - probabilité — 489
- Conditions de Cauchy-Riemann 100, 103
- Conformément équivalents 161
- Conforme (transformation —) 160
- Connexité 563
- double — 475
 - simple — 563
- Conservatif (champ de force —) 442
- Continuité
- absolue 503
 - de la convolution 234
 - correction de — 548
 - de la dérivation 230
 - d'une fonctionnelle 189
 - monotone décroissante 82, 487
 - sous le signe $\int$ 89
- Contour
- de Bromwich 336
 - d'intégration 104
- Contractante (application —) 41
- Contractile (ouvert —) 454
- Contraction d'indices 432
- Contravariantes (coordonnées) 416
- Convergence
- commutative 39
 - dans $\mathcal{D}$ 189
 - dominée (théorème de —) 87
 - en loi 540
 - en probabilité 540
 - faible 229
 - monotone 88
 - normale 49
 - presque sûre 540
 - quadratique 272
 - rayon de — 53
 - dans $\mathcal{S}$ 297
 - semi-convergence 39, 508
 - simple
 - d'une série de fonctions 49
 - d'une série de Fourier 275
 - d'une suite de fonctions 45 - stochastique 540
 - d'une suite dans un EVN 33
 - uniforme
 - d'une série de fonctions 49
 - d'une série de Fourier 276
 - d'une suite double 48
 - d'une suite de fonctions 45 - vers $\pm\infty$ 33
- Convexité 563
- Convolution 299
- algèbre de — 234
 - continuité de la — 234
 - discrète 229
 - de distributions 224
 - de fonctions 94, 221, 280
 - de fonctions causales 337
 - régularisation par — 233
 - et transformée de Fourier 299
- Coordonnées
- contravariantes 416, 430
 - covariantes 418, 429
 - curvilignes 433
- Cornu (spirale de —) 137
- Corps noir (rayonnement) 96
- Corrélation
- coefficient de — 516
 - fonction de — 359
- Correction de continuité 548

Coulomb (potentiel de —) 170
 laplacien du — 211
 transformée de Fourier du — 311
 Coupure 144
 Courant (densité de —) 204
 Courbe 104
 Covariance 516
 Covariantes (coordonnées) 418
 Crible (formule du —) 488
 Critère
 de Cauchy 37, 38
 de Rayleigh 323
 des séries alternées 62
 Crochet de dualité 564
 Croissance lente (fonction à —) 306
 Curvilignes (coordonnées —) 433
 Cyclique voir Groupe cyclique

D

$\mathcal{D}'_+, \mathcal{D}'$ 224
 d (dérivée extérieure) 449
 dx 102, 118
 $dx^i \wedge dx^j$ 445
 $dz, d\bar{z}$ 102
 $\partial/\partial z, \partial/\partial \bar{z}$ 102
 ALEMBERT Jean le Rond d' 373
 d'alembertien 372
 de Moivre 158
 théorème de — -Laplace 547
 DEBYE Petrus 153
 Debye (écran, potentiel de —) 326
 Décorrélées (variables aléatoires —) 518
 Décroissance rapide (fonction à —) 296
 Degré d'une représentation 467
 Demi-vie 512
 Dense (partie —) 559
 Densité
 de charge et de courant 204
 de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}'$ 234
 de probabilité 503
 conditionnelle 515
 conjointe 514, 519
 marginale 514, 515
 de $\mathcal{S}$ dans L^2 298
 spectrale 359, 360
 Dérivabilité sous le signe somme 90, 91
 Dérivation (continuité de la —) 230
 Dérivée
 d'une distribution 196
 extérieure 449
 d'une fonction discontinue 205
 Développement
 multipolaire 262, 263
 perturbatif 56
 en série asymptotique 55
 en série entière 53, 54
 en série de Fourier 276
 Différentielle
 d'une fonction 118
 forme — 439, 449
 Difféomorphisme 571
 $\mathcal{E}^1$ — 433
 Différentiable 570
 Différentielle 570
 Diffraction 317
 Diffuse
 mesure — 79
 probabilité — 497
 Diffusion et marche aléatoire 551
 Dilatée d'une distribution 195
 DINI Ulisse 47
 Dini (théorèmes de —) 47

Dirac

distribution de — 191, 200–204
 distribution de — 3D 191
 distribution linéique de — 201
 distribution surfacique de — 200
 masse de — 487
 peigne de — 191, 311
 suite de fonctions de — 88, 176, 230
 transformées de Fourier de δ 308
 DIRAC Paul 192
 Direct (produit) 219, 220
 DIRICHLET Gustav Lejeune 176
 Dirichlet
 fonction de — 80, 289
 intégrale de — 131
 noyau de — 277
 problème de — 175
 sur le disque 177
 sur un demi-plan 180
 sur une bande 180
 théorème de — 275
 Dispersion (relation de —) 216
 Distribution 188
 dérivée 196
 dilatée 195
 de Dirac 191
 de Heaviside 199
 de Maxwell-Boltzmann 579
 régularisation d'une — 233
 régulière 190
 singulière 191
 support d'une — 192
 tempérée 306
 translatée 194
 transposée 194
 Domaine 101
 Dominée
 suite — par une autre 560
 théorème de convergence — 87
 Domination 87
 Doppler (effet —) 223
 Dual
 base — e 564
 d'un EV 417, 564
 de Hodge 459
 Dualité métrique 428
 Durée de vie 512

E

$\mathcal{E}'$ 234
 $\varepsilon(\sigma)$ 446
 $\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$ 460
 E^* 417
 Écart-type 510
 Échantillonnage 363
 Écran total 330
 Effet
 cigogne 521
 Doppler 223
 Égalité
 de Bienaymé 527
 de Parseval 252, 273
 de Parseval-Plancherel 298
 de polarisation 248
 de Taylor-Lagrange 51
 Égorov (théorème d'—) 82
 EINSTEIN Albert 417
 Einstein (conventions d'—) 417, 440, 447
 Électromagnétisme 217, 326, 345, 372–380
 Électrostatique 169, 199
 Élément
 de matrice 390, 408
 propre 402

Endomorphisme voir Opérateur
 auto-adjoint 391, 568
 normal 391
 symétrique 391
 Énergie (d'un signal) 359
 Engendrée (tribu —) 77, 486
 Ensemble
 mesurable 78
 négligeable 80
 des parties d'un ensemble 76
 résolvant 403, 413
 Entière (fonction —) 112
 Équation
 —s de Maxwell 459, 460
 de la chaleur 197, 238, 380
 de Klein-Gordon 386
 de Poisson 168
 de Schrödinger 384
 Équivalent
 chemins —s 104, 441
 normes —es 561
 ouverts conformément —s 161
 suites —es 560
 Espérance 507, 509
 Espace
 des distributions 188
 des épreuves 485
 de Hilbert 251
 mesurable 78
 mesuré 78
 de Minkowski 427
 préhilbertien 246
 probabilisé 487
 probabilisable 485
 séparable 252
 de Schwartz 297, 306
 tangent 573
 -test 188
 Espace vectoriel
 SEV engendré 245
 libre 586
 normé 557
 normé complet 36, 561
 Espérance 528
 de $\varphi(X)$ 507, 510
 de $\varphi(X, Y)$ 514
 Essentielle (singularité —) 120
 Essentiellement auto-adjoint 410
 Étagée (fonction —) 72
 État (fonction d'—) 442
 Étoilé (ouvert —) 443, 454
 EULER Leonhard 57
 Euler (fonction Γ d'—) 158, 579
 Événement 485
 —s incompatibles 485
 —s indépendants 491
 presque certain, presque impossible 498
 réalisé 485
 Exacte (forme différentielle —) 442, 454
 Exponentielle (loi —) 505
 lien avec la loi de Poisson 529
 Extérieure
 algèbre — 445, 448
 dérivée — 449
 Extremum lié 577

F

$\mathcal{F}[f]$ 287
 Famille libre / génératrice 245
 Faraday (tenseur de —) 458

Fejér
 noyau de — 277
 sommes de — 280, 317
 théorème de — 277
 Fermé 558
 forme différentielle —e 442, 454
 opérateur — 401
 Fermable (opérateur —) 401
 FEYNMAN Richard 388
 Fidèle (représentation —) 467
 Fischer (théorème de Riesz—) 75, 76, 274
 Fixe (point —) 41
 Fonction
 Γ d'Euler 158, 579
 analytique 54, 110
 anti-holomorphe 103
 d'autocorrélation 359, 360
 de Bessel 323, 326
 caractéristique 524
 causale 331, 358
 de cohérence 359, 360
 à croissance lente 306
 à décroissance rapide 296, 306
 « — » de Dirac 191
 de Dirichlet 80, 289
 entière 112
 étagée 72
 d'état 442
 Γ d'Euler 158, 579
 génératrice 525
 de Green 169, 235, 368, 367–388
 du d'alembertien 373, 375
 de l'éq. de la chaleur 197, 238, 380, 381
 de l'oscillateur harmonique 237, 368
 —s de Haar 256
 harmonique 147–150, 444
 de Heaviside 80, 199
 hermitienne 294
 holomorphe 101
 indicatrice 72
 intégrable 73
 d'intercorrélation 360
 localement sommable 190
 méromorphe 122
 mesurable 80
 multivaluée 143–146
 porte 223, 288
 de puissance finie 360
 régularisée d'une — 275
 de répartition 497
 conjointe 513, 519
 sommable 73
 -test 188
 de transfert 350
 Fonctionnelle 188
 Fondamental (théorème — de l'analyse) 86
 Forme
 coordonnée 418
 différentielle 439, 449
 exacte 442, 454
 fermée 442, 454
 extérieure
 1-forme extérieure 564
 2-forme extérieure 445
 k -forme extérieure 446
 linéaire 417, 564
 polaire 248
 volume 447
 Formule
 de Bayes 490, 491
 de Cauchy 62, 109, 110
 du crible 488

de Green 209
 de Green-Ostrogradski 209, 456
 de Green-Riemann 453
 de Gutzmer 62
 de Kœnig 510
 de Poincaré 488
 des probabilités composées 489
 des probabilités totales 491
 de Rodrigues 259
 sommatoire de Poisson 281, 313
 de Stirling 158
 de Stokes 453
 de Taylor 51
 de Taylor-Lagrange 51
 de Taylor-Young 51
 de transfert 507, 510, 514, 515
 FOURIER Joseph 267
 Fourier
 calcul de TF par résidus 130
 coefficients de — 269
 d'une distribution 279
 série de — 269, 276
 somme partielle de — 251
 transformée de — 287–366
 conjuguée 287
 dans $\mathbf{R}^n$ 351
 d'une distribution 306
 en sinus ou cosinus 302
 d'une fonction 287
 inverse 291, 293, 297, 298, **311**
 Fréquence plasma 218
 Fraunhofer (approximation de —) 317
 Fresnel (intégrale de —) 137
 FUBINI Guido 92
 Fubini (théorème de — pour les séries) 44
 Fubini-Lebesgue (théorème de —) 92
 Fubini-Tonelli (théorème de —) 92

G

$\mathbf{g}$ 427
 $\hat{\mathbf{g}}$ 430
 $g^{\mu\nu}$ 430
 $g_{\mu\nu}$ 427
 Gamma (fonction Γ d'Euler) 158, 579
 GAUSS Carl 543
 Gauss (loi de —) 488, **506**, **544**, 592
 Gaussienne 137, 288, 302
 Gelfand (triplet de —) 394
 Générateurs infinitésimaux 470
 Génératrice (fonction —) 525
 Géométrie (loi —) 500
 GIBBS Josiah 315
 Gibbs (phénomène de —) 276, 315
 Gram (matrice de —) 427
 Grands nombres
 loi faible des — 541
 loi forte des — 542
 GREEN George 113
 Green
 fonction de — ... 169, 235, **368**, 367–388
 formule de — 209
 formule de — -Ostrogradski 209, 456
 formule de — -Riemann 453
 théorème de — 114
 théorème de — -Riemann 113
 Groupe 465
 à un paramètre 470
 abélien 465
 cyclique voir Permutations
 des rotations 468
 Gutzmer (formule de —) 62

H

$H(x)$ 199
 Haar (fonctions de —) 256
 Hankel (transformée de —) 326
 Harmonique
 —s sphériques 263
 fonction — 147–150, 444
 HEAVISIDE Oliver 199
 Heaviside
 distribution de — 199
 fonction de — 80, **199**
 transformée de Fourier de H 309
 transformée de Laplace de H 333
 Heisenberg (rel. d'incertitude d'—) .. 355, 413
 Helmholtz (théorème de —) 352
 Hermite (polynômes d'—) 256, 260
 Hermitien
 endomorphisme — 391
 fonction —ne 294
 opérateur — 404
 produit — 246
 Hessienne 576
 HILBERT David 250
 Hilbert
 espace de — 251
 transformée de — 216, **357**
 Hilbertienne (base —) 252
 Hodge (opérateur de —) 459
 Holomorphe (fonction —) 101
 Holomorphie (théorème d'—) 91
 Homéomorphisme 161
 Homotopie 563

I

Identité de polarisation 248
 Image 332
 Implicites (th. des fonctions —) 574
 Impulsion
 incertitude sur l'— 354
 moyenne 353
 opérateur — 353
 représentation — 353
 Impulsionnelle (réponse) 227
 Incertitude
 relation d'— 355, 413
 sur la position / l'impulsion 354
 Indépendance
 d'événements 491
 de tribus 491
 de deux variables aléatoires 519
 Indicatrice (fonction —) 72
 Indice d'un chemin 106, 581
 Indices
 contractés 432
 contravariants 416, 430
 covariants 418, 429
 Inégalité
 de Bessel 250
 de Bienaymé-Tchebychev 537
 de Cauchy-Schwarz **247**, 516
 d'Heisenberg 355, 413
 de Markov 538
 de Minkowski 247
 de Taylor-Lagrange 51
 Inertie (loi de Sylvester) 427
 Intégrable (fonction —) 73
 Intégrale
 sur un chemin 104
 de Dirichlet 131
 d'une forme différentielle 450
 de Fresnel 137
 de Lebesgue 70, **73**
 de Riemann 67

Intercorrélation 360
 Intérieur d'une partie d'un EVN 558
 Inverse de convolution 235
 Inversion
 théorème d'— globale 571
 théorème d'— locale 572
 de la T. Fourier .. **291**, 293, 297, 298, **311**
 de la T. Laplace 336
 Itération de Picard 63

J

$J_0(x)$, $J_1(x)$ (fonctions de Bessel) 323
 Jacobien 93
 Jacobienne 570
 Jauge (fixation de —) 578
 JORDAN Camille 130
 Jordan (lemmes de —) 128
 JOUKOVSKI Nicolaï 162
 Joukovski (transformation de —) 162

K

Ket 254, **392**
 Khintchine (th. de Wiener- —) **362**
 Kirchhoff (intégrale de —) 240, 346
 Klein-Gordon (équation de —) 386
 Kœnig (formule de —) 510
 KOLMOGOROV Andreï Nikolaïevitch 486
 Kramers-Kronig 216
 KRONECKER Leopold 420
 Kronecker (symbole de —) 425

L

L^∞ 289
 $\Lambda^{*2}(\mathbf{E})$ 445
 $\Lambda^{*k}(\mathbf{E})$ 446
 $L^2(\mathbf{R})$ 256
 $L^2[0; 2\pi]$ 267
 $L^2[0; a]$ 255
 L^1 **75**, 289
 ℓ^2 254
 Lagrange
 formule de Taylor- — 51
 multiplicateurs de — 576
 Lagrangien de Proca 461
 Laguerre (polynômes de —) 260
 Landau (notations de —) 560
 LAPLACE Pierre Simon de 332
 Laplace
 méthode de — 153
 théorème de de Moivre- — 547
 transformée de — **331**, 331–347
 Laurent (série de —) 122, 123, **123**
 LEBESGUE Henri 73
 Lebesgue
 intégrale de — **73**
 mesure de — 78
 théorème de — 87
 Legendre
 polynômes associés de — 263
 polynômes de — 259, 261
 Lemme
 de Borel-Cantelli 493
 des coalitions 523
 de Jordan 128
 de Riemann-Lebesgue **270**, 290
 de Zorn 245
 Lente (fonction à croissance —) 306
 Levi (théorème de Beppo —) 88
 Levi-Civita (tenseur de —) **460**, 471
 LÉVY Paul 546
 Libre
 espace vectoriel — 586
 famille — 245

Limite voir Convergence
 classique 28
 simple
 d'une série 49
 d'une suite 45
 uniforme
 d'une série 49
 d'une suite 45
 Linéaire (forme —) 564
 L^∞ 95
 LIOUVILLE Joseph 113
 Liouville (théorème de —) 62, 112
 Lipschitz (théorème de Cauchy- —) 63
 Localement fini 121
 Localement sommable (fonction —) 190
 Logarithme complexe 143, 144
 Loi **496**
 de Bernoulli 499
 binomiale 499, 591
 approx. par une loi de Poisson ... 503
 de Cauchy **511**, 551, 591
 conditionnelle 514
 convergence en — 540
 exponentielle 505
 lien avec la loi de Poisson 529
 faible des grands nombres 541
 forte des grands nombres 542
 gaussienne **506**, **544**, 592
 géométrique 500
 marginale 513, 514
 normale 488, **506**, **544**, 591
 table de $\mathcal{N}(0, 1)$ 592
 des petits nombres 502
 de Poisson **502**, 551, 591
 approximation gaussienne 549
 comme limite de loi binomiale ... 503
 lien avec l'exponentielle 529
 du premier succès 500
 sans mémoire 501
 de Stefan 96
 uniforme 505
 Longitudinaux (champs —) 351
 Longueur d'un chemin 106
 Lorentzienne 288, 293, 302, 511

M

$\mathcal{M}^{1,3}$ 427
 Marche aléatoire 551, 552
 Marginale (loi —) 513
 Markov (inégalité de —) 538
 Masse de Dirac (atomique) 487
 Matrice
 élément de — 390, 408, 564
 de Gram 427
 hessienne 576
 jacobienne 93
 orthogonale 468
 de Pauli 472, 480
 représentative 564–567
 de rotation 468
 unitaire 472
 wronskienne 369
 Maximum (principe du —) 113, 148
 Maxwell (équations de —) 459, 460
 Maxwell-Boltzmann (distribution de —) .. 579
 Médiane 512
 Mémoire (loi sans —) 501
 Méromorphe (fonction) 122
 Mesurable
 ensemble — 78
 espace — 78
 fonction — 80

Mesure	78
diffuse	79
extérieure de Lebesgue	79
de Lebesgue	78, 79
Méthode	
du col	153
de Laplace	153
de la phase stationnaire	154
de variation de la constante	368
Métrique	427
de Minkowski	427
MINKOWSKI Hermann	428
Minkowski	
inégalité de —	247
pseudo-métrique de —	427
Mode	503
DE MOIVRE Abraham	483
Moment	511, 512
Monotone	
continuité — décroissante	82, 487
théorème de convergence —	88
Monte-Carlo	542
Mouvement brownien	174, 382
Moyenne (théorème de la —)	110, 147
Multiplicateurs de Lagrange	576
Multipolaire (développement —)	262, 263
Multivaluée (fonction —)	145

N

$\mathcal{N}(m; \sigma^2)$	544
$\mathfrak{N}(x)$, $\mathfrak{n}(x)$	544
Négligeable	488
partie —	80
suite — devant une autre	560
Neumann (problème de —)	171
Non monochromatique (signal —)	361
Normé (espace vectoriel —)	557
Normal (endomorphisme —)	391
Normale	
convergence —	49
loi —	488, 506 , 544 , 591
table de $\mathcal{N}(0, 1)$	592
Norme	557
—s équivalentes	561
hermitienne	247
linéaire	562
subordonnée	562
Noyau	176
de la chaleur	197, 238, 380, 381
de Dirichlet	277, 280
de Fejér	277, 280
d'un morphisme de groupes	467
de Poisson	176, 281
de Schrödinger	385

O

$O(\alpha_n)$, $o(\alpha_n)$	560
$O(3)$	468
Observable	404
Ondettes	256, 324
Opérateur	
auto-adjoint	404
borné (continu)	401
de la chaleur	197, 238, 380
fermé	401
fermable	401
hermitien (symétrique)	404
de Hodge	459
impulsion	353
position	352
Optique physique	317–323, 358
cohérence	61, 361
intégrale de Kirchhoff	240, 346

Ordre d'un pôle	123
Original	332
Orthogonal (système —)	248
Orthogonale (matrice —)	468
Orthogonalité	248
Orthonormé (système —)	248
Oscillateur harmonique	237, 368
Ostrogradski (formule de Green —)	209, 456
Ouvert	558
—s conformément équivalents	161
contractile	454
étoilé	443 , 454
—s homéomorphes	161

P

P (opérateur impulsion)	399
$\mathfrak{P}$	76, 485
Π (fonction porte)	223
$\mathcal{P}(\lambda)$	502
p.p. (presque partout)	80
Paradoxe	
de Banach-Tarski	80
dans un circuit électrique	30
en mécanique classique	23
en mécanique quantique	413
en optique	61
téléphonique	528
Paratonnerres	173
Pari de Pascal	507
Parseval	
égalité de —	252, 273
égalité de — -Plancherel	298
Partie finie $\text{pf}(1/x^k)$	238 , 326, 343
Partie positive (négative)	73
Pas (d'une subdivision)	68
Pascal (pari de —)	507
Pauli (matrices de —)	472
Peigne de Dirac	191, 311
Percolation	173
Père Lachaise	493
Permutation	446
Permutations	voir Symétrie
Permuter	
$\int$ et $\lim$	87
$\int$ et $\sum$	88
les termes d'une série	39, 40
Pétanque	187
Petits nombres (loi des —)	502
$\text{pf}(1/x^k)$	238 , 326, 343
Phase stationnaire (méthode de la —)	154
Phénomène	
de Gibbs	276, 315
de Stokes	57
Picard (itération de —)	63
POINCARÉ Henri	454
Poincaré	
formule de —	488
théorème de —	443, 454, 454
Point	
d'accumulation	114
de branchement	122, 144
d'arrêt	171
fixe	32
théorème du — fixe	41, 61
Poisson	
formule sommatoire de —	281, 313
loi de —	502 , 551, 591
approximation gaussienne	549
comme limite de loi binomiale	503
lien avec l'exponentielle	529
noyau de —	176, 281
POISSON Denis	177
Polaire (forme — d'une égalité)	248

Polarisation (identités de —) 248
 Pôle 120
 à l'infini 152
 ordre d'un — 123
 simple 123
 Polynômes
 d'Hermite 256, 260
 de Laguerre 260
 de Legendre 259, 261
 associés de Legendre 263
 de Tchebychev 260
 Porte (fonction —) **223**, 288
 Position
 incertitude sur la — 354
 moyenne 353
 représentation — 353
 Potentiel
 de Coulomb 211, 311
 de Debye 326
 de Yukawa 461
 Préhilbertien (espace —) 246
 Presque partout 80
 Presque sûrement 488
 Primitive 86
 Principe
 d'incertitude 355, *413*
 du maximum 113, 148
 Probabilité
 —s composées (formule des —) 489
 conditionnelle 489
 diffuse 497
 —s totales (formule des —) 491
 Problème
 de Cauchy 236, 344
 de Dirichlet 175
 de Neumann 171
 Proca (lagrangien de —) 461
 Produit
 de Cauchy 225
 de convolution
 de distributions 224
 de fonctions **94**, **221**, *280*
 de fonctions causales 337
 et T. Fourier 299
 direct (tensoriel)
 de distributions 220
 de fonctions 219
 extérieur 447, **448**
 hermitien 246
 scalaire 246, 428
 tensoriel 421–426
 de distributions 220
 d'espaces vectoriels **421**, 586
 de fonctions 219
 d'une forme et d'un vecteur 424
 de formes 422
 d'un vecteur et d'une forme 424
 de vecteurs 423
 Projection orthogonale 249, 409
 Prolongement
 analytique 150
 d'un opérateur continu 304
 d'un opérateur de $\mathcal{H}$ 398
 Propagateur *voir* Fonction de Green
 de Feynman 388
 Pseudo-métrique 427
 Puissance finie (fonctions de —) 360
 Puissance moyenne d'une fonction 360
 Pupille circulaire 322

Q

Quadrature (intégration par —) 261
 Quadrivecteur 204
 Quasi-complet (système —) 491

R

$\bar{R}^+$ 78
 Réduite (variable aléatoire —) 511
 Résonance 351
 RAMANUJAN Srinivasa 139
 Rapide (fonction à décroissance —) 296
 Rayleigh (critère de —) 323
 Rayon de convergence 53
 Réalisation d'un événement 485
 Régularisation d'une distribution 233
 Régularisée d'une fonction 275
 Relation
 de dispersion (Kramers-K.) 216
 de fermeture 396
 d'incertitude 355, 356, *413*
 Relativité restreinte 204, 221, *239*
 Répartition (fonction de —) 497
 Repliement du spectre 364
 Réponse impulsionnelle 227
 Représentation
 d'une forme linéaire 389, 566
 fidèle 467
 d'un groupe 467
 impulsion 353
 matricielle 409
 position 353
 triviale 467
 Résidu 125
 à l'infini 152
 applications 128–136
 calcul pratique 127
 théorème des résidus 126
 Riemann
 formule de Green- — 453
 intégrale de — 67, **68**
 sommes de — 68
 sphère de — **151**, 479
 surface de — 145
 théorème de — 161
 RIEMANN Bernhard 145
 Riemann-Lebesgue (lemme de —) 270, 290
 Riesz (théorème de —) 393
 Riesz-Fischer (théorème de —) 75, 76, 274
 Rodrigues (formule de —) 259

S

SO(3) **468**, 468–480
 $\mathcal{S}$ **297**, 306
 $\mathcal{S}$ (opérateur de classe —) 407
 $\mathcal{S}'$ 306
 SU(2) **472**, 468–480
 $\mathfrak{S}_n$ 446
 σ -additivité 78, 487
 σ_x 510
 σ -algèbre 76
 Salaire de la peur (le —) *240*
 Scalaire
 produit — **246**, 428
 pseudo-produit — 428
 SCHMIDT Erhard 264
 Schrödinger (équation de —) 384
 SCHWARTZ Laurent 211
 Schwartz (espace de —) **297**, 306
 SCHWARZ Hermann 165
 Schwarz (théorème de —) 450, 573
 Schwarz-Christoffel (transf. de —) 165

Semi-convergente (série —)	39, 508
Semi-norme	557
Séparable (espace de Hilbert —)	252
Série	
calcul de — par résidus	134
entière	53
de Fourier	269, 276
somme partielle	251
de Laurent	122, 123, 123
semi-convergente	39 , 508
de Taylor	54
sgn (distribution « signe »)	239
Shannon (théorème de —)	363
Si(x)	315
Signal	
analytique	357, 358
d'énergie finie	359
imaginaire	357
non monochromatique	361
Signature	446
Simple	
connexité	563
courbe —	104
pôle —	123
Simultanée (réalisation —)	485
Singe	493
Singularité	
à l'infini	122, 152
artificielle	120
essentielle	120
Sinus cardinal sinc(x)	288, 294, 296
Sinus intégral Si(x)	315
Sommes	
de Fejér	280, 317
de Riemann	68
Sous-espace vectoriel engendré	245
Sous-groupe	466
Spectre	
continu	402, 413
discret	402, 413
d'une fonction	287
de puissance	360
repliement du —	364
résiduel	403, 413
Sphère de Riemann	151 , 479
Sphériques (harmoniques —)	263
Spineur	478
Spirale de Fresnel/Cornu	137
Stationnaire (méthode de la phase —)	154
Stefan (loi de —)	96
Stirling (formule de —)	158
Stokes George	453
Stokes	
formule de —	453
phénomène de —	57
Subdivision	68
Subordonnée (norme —)	562
Succès (loi du premier —)	500
Suite de fonctions de Dirac	88, 176, 230
Support d'une distribution	192
Surface de Riemann	145
Sylvester (loi d'inertie de —)	427
Symétrie	
endomorphisme —	391
groupe —	<i>voir</i> Cyclique
opérateur —	404
Système	
causal	227
complet d'événements	486
complet induit par une v. a.	499
orthonormé	248
quasi-complet d'événements	491
total	252, 397

T

$\mathcal{T}(\mathcal{C})$	486
Tangent (espace —)	573
Taylor Brook	50
Taylor	
formules de —	51
reste de —	50
série de —	54
Taylor-Lagrange (formule de —)	51
Tchebychev Pafnouti	538
Tchebychev	
inégalité de —	537
polynômes de —	260
Tempérée (distribution —)	306
Temps d'attente au rendez-vous	528
Tenseur	426
de Faraday	458
de Levi-Civita	460 , 471
Tensoriel (produit —) . <i>voir</i> Produit tensoriel	
Théorème	
de Banach	41
de Beppo Levi	88
de Bolzano-Weierstrass	561
d'unicité de Cantor	280
de Casorati-Weierstrass	120
de Cauchy	107, 582
de Cauchy-Lipschitz	63
central limite	382, 545
de convergence dominée	87
de de Moivre-Laplace	547
de Dini	47
de Dirichlet	275
d'Egorov	82
de Fejér	277
des fonctions implicites	574
fondamental de l'analyse	86
de Fubini pour les séries	44
de Fubini-Lebesgue	92
de Fubini-Tonelli	92
de Green	114
de Green-Riemann	113
de Hellinger-Toeplitz	405
de Helmholtz	352
d'inversion globale	571
d'inversion locale	572
de Liouville	62, 112
du maximum	113, 148
de la moyenne	110, 147
de Poincaré	443, 454, 454
du point fixe	41
du rayon	53
de représentation	389, 393, 566
des résidus	126
de Riemann	161
de Riesz	393
de Riesz-Fischer	75, 76, 274
de Schwarz-Christoffel	165
de Schwarz	450, 573
de Shannon	363
spectral	391
spectral généralisé	407
de Stokes	453
de Sylvester (loi d'inertie)	427
de transfert	515
de van Cittert-Zernike	365
de Weierstrass	46
de Wiener-Khinchine	362
Total	
écran —	330
système —	252, 397
Transfert	
fonction de —	350
formule de —	507, 510 , 514, 515

Transformée

de Fourier	287–366
de III	311
d'une convolution	299
dans $\mathbf{R}^n$	351
de δ	308
d'une distribution	306
d'une fonction	287
d'une gaussienne	302
de H.	309
inverse	291 , 293, 297, 298, 311
de la lorentzienne $1/(1+t^2)$	97
en sinus ou cosinus	302
de $\text{vp}(1/x)$	309
de Hankel	326
de Hilbert	216, 357
de Laplace	331 , 331–347
en z	343

Transformation

d'Abel	62
conforme	160
de Lorentz	204, 420
de Schwarz-Christoffel	165
Translatée d'une distribution	194
Transposée d'une distribution	194
Transverses (champs —)	351
Tribu	76
—s indépendantes	491 , 519
engendrée	77, 486
par une variable aléatoire	519
Triplet de Gelfand	394
Triviale (représentation —)	467

U

Uniforme (loi —)	505
Unitaire (matrice —)	472

V

Valeur principale de Cauchy	
transformée de Fourier de la —	309
$\text{vp } 1/(x^2 - a^2)$	219
$\text{vp}(1/x)$	193 , 194 , 213
Valeur propre	402, <i>413</i>
généralisée	402, <i>413</i>
van Cittert (th. de — -Zernike)	365
Variable aléatoire	484, 496
absolument continue	503
centrée	511
continue	503
—s décorrélées	518
discrète	499
—s indépendantes	519
mixte	504
produit de —s	527
quotient de —s	527
réduite	511
somme de —s continues	526
somme de —s discrètes	526
Variance	510
d'une somme de v.a.	516, 527
Variation de la constante (méthode de —)	368
Vecteur	471
aléatoire	519
propre	402
généralisé	407
Vieillessement (propriété de non —)	501
Vitesse complexe (d'un fluide)	171

W

Weierstrass	
théorème de Bolzano- —	561
théorème de —	46
WEIERSTRASS Karl	580
Wiener-Khinchine (théorème de —)	362
Wronskien	369

Y

Young (formule de Taylor- —)	51
Yukawa (potentiel de —)	461

Z

Zéro d'une fonction holomorphe	114
Zernike (th. de van Cittert- —)	365
Zorn (lemme de —)	245

Mis en page avec L^AT_EX sous Linux

Affinages typographiques
Paul PICHAREAU
Jean-Yves FÉVRIER

Figures réalisées avec TikZ,
Python, Scilab et Xfig